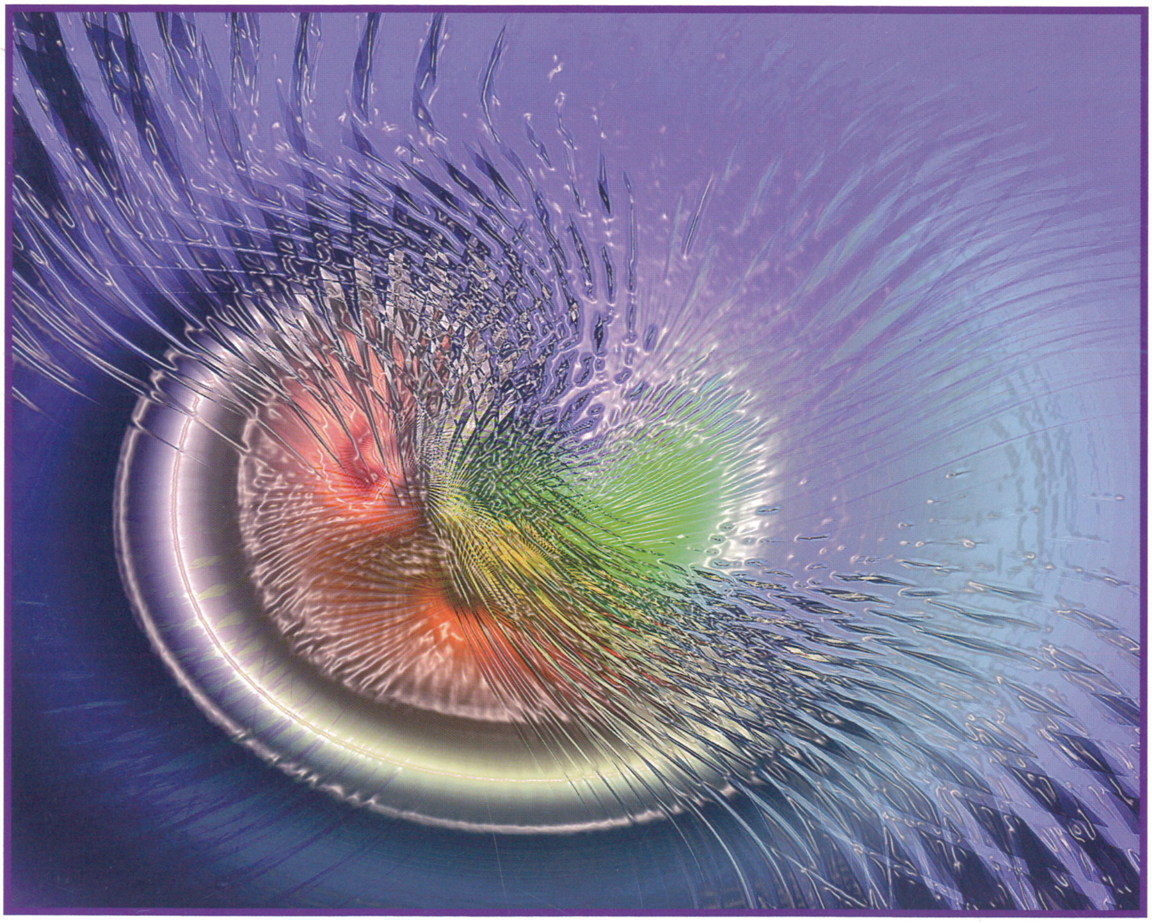
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2009年12月1日発行　第47巻12号　毎月1回1日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

12
2009

特集《原理》の探求
深遠なる物理法則の源に迫る



No.558

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 558 December 2009

《原理》の探求

深遠なる物理法則の源に迫る

表紙：戸川　隼人

December 2009　MATHEMATICAL SCIENCES　Number 558

特集／《原理》の探求

巻頭言

それぞれの『エウレカ！』を

米谷 民明

この特集号を手にする読者の多くは，数学や物理が好きな若い方々であろう．そういう人は，何かの問題，ふと疑問に思ったり，本を読んで知った問題，他人に教えられた問題など，どういうものであってもよいが，自分で本当に考えて理解できた，発見ができた，と納得できるときの喜びや快感を，程度の差こそあれ経験しているに違いない．

アルキメデスは，「アルキメデスの原理」を入浴中に思いつき，興奮のあまり『エウレカ！』(わかった！）と叫びながら裸のまま飛び出したという言い伝えがよく知られている（本特集号「流体に成り立つ原理」でも触れられている)．その真偽はさて置いても類似の話は他にも数多あり，知的探究心にあふれた若者を刺激してきた．こうした逸話にも現れているように，実際，発見の喜びは強く深いもので，人間の達成感のうちの最たるものの一つであることは確かである．歴史に残るような世紀の大発見ではなくとも，私たちは平凡な学習の過程の中でさえも，それぞれ自分なりの小さな発見を積み重ねながら成長してきている．そうしたつつましい個人的な「再」発見を，「おもしろい」とか「役に立つ」と感じつつ学習を進めるわけである．これは，多分，人間の成長，さらにはちょっと唐突な言い方を許してもらえば，生命体一般の進化を促す本能的なメカニズムとして組み込まれているのではないだろうか．

物理や数学でなくとも，一般に物事を理解するとは，何らかの意味で，表面だけでは直ちには見えていない「仕組み」を感得することである．この仕組みの理解が深ければ，表面的には一見異なるようなものも同じ種類の「仕組み」をあてはめて説明できるようになる．学問的な意味で「原理」と呼ぶのは，個人的に会得できたこうした「仕組み」を超えて，広く検証され有効性が認められた理解の仕方のことと言ってよいだろう．

もちろん，「原理」と言っても，その性格，役割，等々に関して様々なレベルがある．物理法則を支える基本原理，ないしは前提としての最も深いレベルのものから，法則による系統的な説明が困難であるとき，一つの対処法としての考え方と言ったほうが相応しい「原理」まで色々である．例えば，人間原理（「宇宙論の諸原理」参照）は，後者の色彩の強い原理の一つと言っても，多くの識者に同意してもらえるだろう．また，「法則」と「原理」は，重なる部分もあるが，それぞれの学問分野の中で，かなり判然と区別されて用いられていることが多い．ニュートンの運動法則を運動原理という言い方をすれば，多くの人は違和感を持つだろう．それは単に慣習的な用語とは違うという理由だけでは説明できない．一方，ニュートンの法則を成立させるのに，欠かせない基礎の一つである，ガリレイの「相対性原理」を相対性の法則と言えば，やはり違和感を持つだろう．「原理」と言う場合，そこには，何かしら，他の根拠から導くのは難しいという意味が込められている．少なくとも，「原理」として認められるに至った起源に

おいては，そのものを他から理解できるわけではないが，一旦それに基づけばある一定の範囲のことがうまく説明できる，あるいは未知の領域の探求に有用である，というようなことで使われるようになった場合が多い．

しかし，実際には，法則がより深いレベルで確立されるにつれ，原理が他の原理と結びついて統一され，普遍的な「法則」として纏められるに至ると，今度は，ある特定な「原理」が成り立つかどうかは，より広い「法則」という枠組みに基づき説明・導出が検討されなければならないということがしばしば起こる．逆に，法則が数学的に確立されているとき，その構造を解釈するために指針的な役割を果たすものとしての「原理」もある．さらに，法則を確立する探求過程で指導原理として役割を果たす「原理」がある．また，少しカテゴリーが違って，現象の説明というより，むしろ方法論としての性格が強い「原理」もある．

第1の分類の例として，例えば，古典力学やその応用に現れる多くの原理は，ニュートンの運動方程式と力に対する普遍的法則を合わせたものから，本来は説明されるべきものになる．さらに遡れば，ミクロ世界の法則としての量子論から導かれるべきものと言える．第2の場合の典型的な例は，量子力学における不確定原理や，重ね合わせの原理である．第3の場合としては，ボーアの対応原理や，特殊相対論においてアインシュタインが準拠した意味での光速不変の原理，などが挙げられる．第4の例としては，例えば，変分原理あるいは作用原理がある．

いずれにしても，「原理」の探求は，物事を理解し，さらに応用を広げようとする際に取るべき最も基本的な姿勢である．しかし，学問の進展により，かつては有効性があっても，理解が進むにつれ，実は「原理」を追求するという態度が意味をなさなくなることもある．まず，言うまでもなく，物理現象の説明に関する「原理」は，あくまでもその有効性は，経験＝[実験＋観測] によって判断されなければならない．どんなに美しく深く見える「原理」でも経験と矛盾するなら捨てられる．また，対象の性格から見て「原理」をふりかざすこと自体が無意味と判断される場合もある．例えば，古代の人間にとって，惑星の運動規則は神秘的で，数の調和と対応させて理解しようとして原理が探求されてきた．しかし，現代の物理学から見れば，太陽系の惑星の配列そのものの説明に原理を求めるのは無意味である．より具体的な例で言えば，皆既日食がどれほど私たちにとって感動的で深淵に感じられる現象だとしても，背後に新たな原理を探すのは無駄というものである．

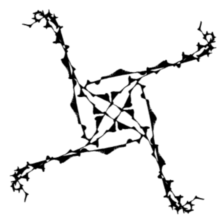
これと対比して，「原理の探求」を最も成功させたのは，アインシュタインである．彼自身の回想によると，彼は19世紀終わり頃の物理学の状況を危機と捉え，全く新たな原理の発見によってのみ進展できるという立場を取った．当時の物理学者で，それほど明確に「原理」の発見を意識して研究を進めた人は他にいなかった．それにより彼は，相対論と量子論の進展に人類史上不滅の業績をあげ得た．しかし，彼をもってしても，量子力学の（解釈を含む）展開や統一場理論に関しては，「原理」を発見できず，大きな寄与を成すことはできなかったのである．もちろん，これらは後の世代の課題として受け継がれている．

現代科学の最前線で直面している様々な謎があるが，果たしてそれらの背後には新しい原理があると期待すべきなのかどうか，既知の法則から説明されるべきなのか，あるいは，単に偶然的な初期条件からの帰結と見なすべきなのか，問題の性格や進展段階によって様々な考え方があるだろう．例えば，生命の起源を説明する原理はあるのだろうか，現代物理学の最も深淵な問題である量子論と（一般）相対論を統一するための原理は何なのだろうか，宇宙の誕生を説明する原理があるのだろうか，等々疑問はつきない．

本特集では，物理学の様々な分野ごとに原理について多彩な解説がなされている．読者は，それぞれごとに自身で『エウレカ！』を追体験するという意識で読んでみてはどうだろうか．

（よねや・たみあき，東京大学大学院総合文化研究科）

力学
てこの原理からハミルトンの原理まで



国場 敦夫

1. はじめに

大学で初めて力学を受講したとき，先生が最初に「力学とは」と板書されたのをよく覚えている．ほどなく教室の中央右側の辺りから「エーテル仮説」に関する質問が飛び出したと思いきや，先生がよどみなく答えられ，刺激に満ちた半年間の授業の幕開けとなった．最終回は 1980 年 9 月 1 日（月），「力学の原理」という表題であった．仮想仕事の原理から始まり，当時のノートは以下のように完結している．



$t=T$

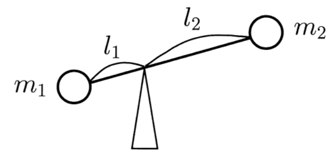
$$\Delta \underbrace{\int_0^T L(q_a, \dot{q}_a)dt}_{\text{作用}} = 0 \qquad \text{ハミルトンの原理}$$

$t=0$

同先生が監修されている本特集号で執筆の機会をいただいた主題は，これらの図，式，概念に他ならず，ほぼ 30 年を経て再び学期末試験の答案を読んでいただけるような御縁に感謝している．実際，本稿 5 節の例題は，同年 9 月 26 日（金）に実施された期末試験の問 3 を一部改変・拝借し，解答を試みたものである．

2. てこの原理

図のように，軽い棒の両端に質量 m_1, m_2 のおもりを取り付けて 1 点（支点）で支える．



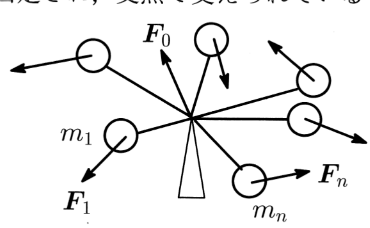
つりあいの条件は

$$m_1 l_1 = m_2 l_2$$

であり，2 つの質点の重心が支点に一致することを意味する．

てこの原理は静力学の基本問題の最も簡単な例である．静力学では，物体，あるいは拘束された質点系のつりあい，つまり静止した初期条件が維持される条件，あるいはそのような配置，平衡点を求めることが主題となる．

少し一般化して，質量 $m_1, \ldots, m_n$ のおもりからなる系を考えよう．これらは軽い棒により相対位置が固定され，支点で支えられている（下図）．



おもりの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ とし，働く力を重力に限らず一般に $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ とする．相対位置の固定された質点系は剛体と等価であり，自由度は 6 である．つりあいの条件は，

$$\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{F}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = 0$$

となる．ここで，$\boldsymbol{r}_0$ は支点の位置ベクトル，$\boldsymbol{F}_0$ は質点系が支点において受ける力である．$\times$ はベクトル積を表す．

第一の条件により，質点系に働く合力は 0 であり，全運動量は一定となる．第二の条件により，質点系に働く力のモーメントの総和は 0 であり，全角運動量も一定となる．従って，静止した初期条件ではこれらはともに 0 のままであり，並進も回転もせず，つりあいが保たれる．

合力が 0 なので，第二の条件は位置ベクトルの原点を何処にとっても変わらない．そこで，支点を原点にとれば $\boldsymbol{r}_0 = 0$ であり，$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = 0$ に帰する．ここで，一様な重力の場合に立ち戻り，$\boldsymbol{F}_i = m_i \boldsymbol{g}$ とおくと（$\boldsymbol{g}$ は鉛直下向き）

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{g} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i \right) \times \boldsymbol{g} \quad (1)$$

により，質点系の重心の位置ベクトルが $\boldsymbol{g}$ と平行になるべきことが導かれる．そのような状況は一般に 2 つあり，重心が支点の真下にあれば安定平衡点，真上にあれば不安定平衡点である．初めに述べたてこの原理は，$n = 2$ で支点と重心が一致する場合に相当する．

3. 仮想仕事の原理

前節で求めたつりあいの条件，支点と重心が鉛直に並ぶべきこと，は正しいが，導出には注意が要る．各質点には重力 $m_i \boldsymbol{g}$ 以外にも棒からの**拘束力**（force of constraint）が働いている．これを $\boldsymbol{F}_i^{(c)}$ と書くと，合力は $m_i \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_i^{(c)}$ である．拘束力 $\boldsymbol{F}_i^{(c)}$ は一般には質点系の配位に依存し得る厄介な力である．つりあいの条件 $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = 0$ の $\boldsymbol{F}_i$ を前節では $m_i \boldsymbol{g}$ ととり，拘束力の寄与は考慮しなかった．これは大丈夫だろうか．

結論からいえば OK で，拘束力はまさにその寄与が消えるように常に「調整し合う」ようになっている力なのである．実際，今の例では質点系を剛体と見なすことができ，拘束力はその内力となるので力のモーメントの総和には寄与しない．

このような事情をより一般的な n 質点系で定式化しよう．質点 i の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ に拘束条件

$$f_j(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, k \qquad (2)$$

が課されているとする[*1]．質点 i に働く力を $\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{(a)} + \boldsymbol{F}_i^{(c)}$ とおく．ここで，$\boldsymbol{F}_i^{(a)}$ は重力のように「与えられた力（applied force）」であり，$\boldsymbol{F}_i^{(c)}$ は拘束条件を保つべく「自発的に生じる」拘束力である．つりあいの条件は $\boldsymbol{F}_i = 0$ であり，これは任意の無限小変位 $\delta \boldsymbol{r}_i$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i^{(a)} + \boldsymbol{F}_i^{(c)}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \qquad (3)$$

と等価である．実際には無限小変位 $\{\delta \boldsymbol{r}_i\}$ は拘束条件と整合するものだけが問題となる．そのような $\{\delta \boldsymbol{r}_i\}$ に対して，拘束力は $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(c)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$ を満たすものであると仮定しよう．拘束条件と整合する $\{\delta \boldsymbol{r}_i\}$ は「超曲面」(2) の「接平面」内にあるので，これは拘束力 $\{\boldsymbol{F}_i^{(c)}\}$ が超曲面の法線方向を向いていること，拘束は滑らかであることを意味しており，自然である．以上の仮定の下に (3) は

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(a)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \qquad (4)$$

に帰着する．拘束力を消去したつりあいの条件 (4) を**仮想仕事の原理**と呼ぶ．拘束条件と整合する任意の仮想的な無限小変位 $\{\delta \boldsymbol{r}_i\}$ に対し，与えられた力 $\{\boldsymbol{F}_i^{(a)}\}$ のする仕事が 0 となる要請から平衡点が定まるという主張である．一般に (4) で $\{\delta \boldsymbol{r}_i\}$ の取り方の自由度は $3n - k$ 次元あり，k 個の関係式 (2) と併せて $3n$ 次元空間の平衡点 $(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n)$ が決まる．

前節の例では，拘束条件は支点が原点に固定され，質点間の相対位置が一定となることであった．これを満たす変位は支点の周りの任意の回転であり，無限小回転角を $\delta\theta$，回転軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ すると $\delta \boldsymbol{r}_i = \delta\theta(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i)$ である．これと

---

*1）**ホロノミックな拘束条件**という．より一般に動力学を扱う際には $f_j(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, t) = 0$ のように時間 t に陽に依存していてもよい．

$\boldsymbol{F}_i^{(a)} = m_i \boldsymbol{g}$ を (4) に代入すると

$$0=\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{g}\cdot\delta\theta(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}_i)=\delta\theta\boldsymbol{g}\cdot\left(\boldsymbol{n}\times\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{r}_i\right)$$
$$=\delta\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{r}_i\right)\times\boldsymbol{g}\right]$$

となる．ここで $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$ を用いた．$\boldsymbol{n}$ は任意の単位ベクトルなので (1) を再現する．

4. ラグランジュの方程式

動力学に進もう．ニュートン (Newton) の運動方程式は

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i^{(a)} + \boldsymbol{F}_i^{(c)} \tag{5}$$

であり，拘束系では静力学のときと同様に 2 つの困難に遭遇する．第一は，拘束力 $\boldsymbol{F}_i^{(c)}$ が介入してくることで，これは質点系の運動に依存し，先験的には決められない．第二に，位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ は拘束条件 (2) のために，独立な変数でない．

ホロノミックな拘束の場合，これらは以下のようにクリアできる．まず第一の問題には仮想仕事の原理のアイデアが使える．すなわち，拘束条件と整合する任意の $\{\delta\boldsymbol{r}_i\}$ に対して，$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(c)}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$ という自然な仮定の下で，(5) は

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(a)}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i \tag{6}$$

に帰着し，$\boldsymbol{F}_i^{(c)}$ は消去される．これを**ダランベール (d'Alembert) の原理**と言う*2)．第二の問題は，原理的には拘束条件 (2) を自動的に満たすような $d=3n-k$ 個の独立変数 $q_1,\ldots,q_d$ を導入すればよい．

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,\ldots,q_d,t)\quad i=1,\ldots,n. \tag{7}$$

ここで，脚注 1) で述べた場合も想定して時間に陽に依存する可能性も含めた．このように系の配位を一義的に表すことのできる独立変数の組 $\{q_1,\ldots,q_d\}$ を**一般化座標**，d を自由度と言う．$q_j=q_j(t)$ は長さの次元を持つ必要はない．例えば半径が ae^{bt} のように変化する球面上に拘束された質点では

$$\boldsymbol{r}=(ae^{bt}\sin\theta\cos\phi, ae^{bt}\sin\theta\sin\phi, ae^{bt}\cos\theta)$$

とおき，θ,ϕ を q_1,q_2 と見なすことができる．

一般化座標の真の有効性は，それが従うべき運動方程式が普遍的に定式化されることにある．それを見るために，表示 (7) をダランベールの原理 (6) に代入してみよう．まず準備として，拘束条件を満たす仮想変位 $\delta\boldsymbol{r}_i$ は q_j たちの自由な仮想変位 δq_j により実現されるので，(7) から

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_j\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

となることに注意する．また，時間微分については

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_j\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t},\quad\therefore\ \frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_j}=\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

という関係式が成り立つ．これらを用いると (6) の左辺は次のように変形される．

$$\sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_i m_i\frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_i}{dt}\cdot\sum_j\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$
$$=\sum_i m_i\sum_j\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)-\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$
$$=\sum_i m_i\sum_j\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)-\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$
$$=\sum_j\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial K}{\partial q_j}\right)\delta q_j,\quad K=\sum_i\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2.$$

K は系の運動エネルギーである．(6) の右辺は

$$\sum_i\boldsymbol{F}_i^{(a)}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i,j}\boldsymbol{F}_i^{(a)}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j=\sum_j Q_j\delta q_j$$

と表せる．ここで**一般化力**

$$Q_j=\sum_i\boldsymbol{F}_i^{(a)}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \tag{8}$$

を導入した．Q_j は力の次元を持つとは限らないが $Q_j\delta q_j$ は常にエネルギーの次元を持つ．仮想変位 δq_j は任意なので，以上から

*2) $\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i^{(a)}-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$ と表記して，慣性力 $-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ により「動力学を静力学に帰着する原理」と言及されることが多いが，より本質的なのは拘束力の消去である．

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \ldots, d \qquad (9)$$

が従う．特に，力 $\boldsymbol{F}_i^{(a)}$ がポテンシャル $U = U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, t)$ を用いて $\boldsymbol{F}_i^{(a)} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}$ と与えられる場合を考えよう．(8) により一般化力は

$$Q_j = -\sum_i \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad (10)$$

となる．最後の U は, (7) により一般化座標と時間の関数 $U = U(q_1, \ldots, q_d, t)$ と了解する．$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$ に注意すると (9) と (10) から

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, d \qquad (11)$$

が導かれる．ここで L は一般化座標 $q_1, \ldots, q_d$ とその時間微分 $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_d$ および時刻 t の関数で,

$$L = L(q_j, \dot{q}_j, t) = K - U$$

により定義される．L を**ラグランジアン**, (11) を**ラグランジュ（Lagrange）方程式**と言う．

特に拘束がなく，ポテンシャル $U(\boldsymbol{r})$ による保存力の下に運動する質量 m の質点の場合，$\boldsymbol{r}$ の 3 成分を q_1, q_2, q_3 と見なせば自由度は $d = 3$ であり，ラグランジアンは $L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(\boldsymbol{r})$ となる．ラグランジュ方程式 (11) は $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}$ となり，ニュートンの運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}$ を再現する．

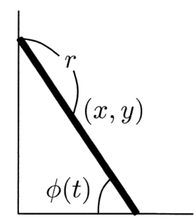
$K+U$ ならば系の全エネルギーであるのになぜ $K-U$ という組合せなのか, 残念ながら単純な説明はない．ともあれホロノミックな力学系の性質は，ラグランジアンという関数に集約される．一旦ラグランジアンが与えられると，系の運動を記述するに過不足のない方程式系が機能する[*3]．それがラグランジュ方程式 (11) であり，任意の一般化座標で通用する．そこでは力の役割は後退しており，エネルギー K, U が主役となる．

ラグランジュがこの定式化を達成した著書『解析力学』(1788) および, ラプラス (Laplace) が太陽系の安定性を "証明" した『天体力学』(1799)[*4] は, 古典力学の完成を画する 18 世紀の古典である．ニュートンの『プリンキピア』(1687) からほぼ 100 年を擁した数学的洗練と共に，イギリスから大陸への学問的風土のうつろいをも感じさせる記念碑と言えよう．

なお，ラグランジアンの取り方には任意性があり，例えば任意の関数 $F = F(q_1, \ldots, q_d, t)$ に対して $L \to L + \frac{dF}{dt}$ と変更してもラグランジュ方程式は不変であることを注意しておく．

5. 例題

長さ l, 質量 m の一様な細い棒が図のように滑らかな壁と床に立てかけられている．重力の作用の下で棒の運動方程式を求めよう．



棒の上端から距離 r の点の座標は $x = r\cos\phi$, $y = (l-r)\sin\phi$ であり, r と $r+dr$ の間の部分の質量は $\frac{mdr}{l}$ なので，その運動エネルギー $K_r dr$, 位置エネルギー $U_r dr$, 棒のラグランジアン L は

$$K_r dr = \frac{mdr}{2l}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad U_r dr = \frac{mdr}{l} gy,$$
$$L = \int_0^l (K_r - U_r) dr = \frac{ml^2}{6}\dot{\phi}^2 - \frac{mlg}{2}\sin\phi$$

と与えられる．自由度は $d = 1$ であり, ϕ を一般化座標 q_1 として，ラグランジュ方程式 (11) は

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{3g}{2l}\cos\phi \qquad (g \text{ は重力加速度})$$

となる．壁や床からの抗力は, 棒がそれに沿って滑るという拘束条件によって取り入れられたことに注意されたい．$\phi(t) = \phi_0 + \varDelta\phi(t)$ とおき, $\varDelta\phi(t)$

*3) このような事情は力学に限らない．例えば熱力学でも，系の熱的性質は「完全な熱力学関数」に集約され，そこからすべての状態方程式が従うという類似の構造がある．

*4) 献本されたナポレオンが「宇宙の創造主たる神について一言も触れられていないではないか」との指摘すると,「私にそのような仮説は必要ありません」と切り返したという逸話はよく引用される．力学と神学が不分離の時代があった．

について線形近似すると

$$\frac{d^2\Delta\phi}{dt^2}=\omega^2(\Delta\phi-\cot\phi_0),\quad \omega=\sqrt{\frac{3g}{2l}\sin\phi_0}.$$

例えば初期条件 $\Delta\phi(0)=0, \Delta\dot{\phi}(0)=0$ を満たす解は $\Delta\phi(t)=-2\cot\phi_0\,\sinh^2\frac{\omega t}{2}$ となり，線形近似が妥当な範囲では $\phi_0-\phi(t)$ は指数関数的に増大することがわかる．一方棒が床に着く瞬間の角速度は $\dot{\phi}=-\sqrt{2}\omega$ である．

6. ハミルトンの原理

ラグランジュ方程式 (11) は，ある汎関数の停留条件になっている．このことを説明しよう．まず汎関数とは何か．数が与えられると数を返すのが関数だという言い方をするなら，汎関数は関数を与えられて数を返す．ラグランジアンの積分

$$I=\int_{t_1}^{t_2}L(q_j(t),\dot{q}_j(t),t)\,dt \tag{12}$$

を考えよう．時刻 t_1, t_2 は固定しておく．本来 $(q_1(t),\ldots,q_d(t))$ はラグランジュ方程式と初期条件から決定されるべき関数であるが，一旦それを忘れて発想を逆転する．すなわち，関数 $q_j(t)$ たちを勝手に与えるごとに，積分 (12) はある数を返すので，$q_j(t)$ たちの汎関数 $I[q_1,\ldots,q_d]$ と見なせる．I を**作用積分**と言う．さて，本来力学的に実現するか否かを問題にせず，いろいろな軌道 $(q_1(t),\ldots,q_d(t))$ を考えたとき，付随する作用積分 I が停留値（極値）をとる条件を見出そう．ある軌道 $(q_j(t))$ と無限小だけずれた軌道 $(q_j(t)+\delta q_j(t))$ での作用積分が等しくなること，つまり変分 $\delta I=I[q_j+\delta q_j]-I[q_j]$ が 0 となる条件である．ただし，軌道の始点と終点は固定して考える．すなわち $\delta q_j(t_1)=\delta q_j(t_2)=0$ とする．変分条件

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q_j,\dot{q}_j,t)\,dt=0 \tag{13}$$

の左辺は以下のように計算される．

$$\int_{t_1}^{t_2}[L(q_j+\delta q_j,\dot{q}_j+\delta\dot{q}_j,t)-L(q_j,\dot{q}_j,t)]\,dt$$

$$= \sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt.$$

$\delta \dot{q}_j = \frac{d(\delta q_j)}{dt}$ に注意して部分積分すると

$$\sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_1}^{t_2} + \sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \, dt.$$

$\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$ により第1項は0である．第2項が任意の無限小変分 δq_j について0となる条件はラグランジュ方程式 (11) に他ならない[*5]．

以上の結果は次のように要約される．始点と終点が指定されたとき，仮想的な軌道 $(q_1(t), \ldots, q_d(t))$ の中で，実際に力学的に実現されるのは，作用積分 (12) が極値をとるものである．これを**作用原理**[*6]，**変分原理**，あるいは**ハミルトン** (Hamilton) **の原理**と言う．実はこのような力学法則の変分法による定式化はオイラー（Euler）の著作『方法』(1744) に魁があり，(11) はオイラー・ラグランジュ方程式とも呼ばれる．そもそも汎関数の停留点とは，変数の取り方に依らない概念である[*7]．従ってハミルトンの原理を第1原理に据えるならば，オイラー・ラグランジュ方程式 (11) が任意の一般化座標で通用する運動方程式であることは自然な帰結となる．

運動を決定するという問題へのアプローチとして，ニュートンの運動方程式とハミルトンの原理はとても対照的である．前者は，力から加速度を知り，初期条件からの速度，位置の変化を刻々と積み上げて（積分して）追跡しようとする局所的なアプローチである．一方後者は，すべての軌道を見わたし，作用積分の値の比較から真の軌道を見つけ出そうとする大域的な視点に立つ．

7. モーペルテュイの原理

時間依存性は度外視し，質点の軌跡だけを求める問題に限定すると，ハミルトンの原理は著しく簡易化する．簡単のため，ラグランジアンが時間を陽に含まず，全エネルギー $E = K + U$ が保存される質点を考えよう．ラグランジアンは $L = K - U = 2K - E$ であることに注意すると，ハミルトンの原理 (13) は $\delta \int K dt = 0$ に帰着する．時間依存性を度外視するので dt を消去したいが，それには軌跡上の線素 $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ との関係

$$\frac{dl}{dt} = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{\frac{2}{m} K}$$

を用いればよい．こうして簡易化されたハミルトンの原理は $\delta \int \sqrt{K} dl = 0$，すなわち

$$\delta \int \sqrt{E - U(\boldsymbol{r})} \, dl = 0 \tag{14}$$

と表されることが分かる．これを**モーペルテュイ** (Maupertuis) **の原理**，または**ヤコビ** (Jacobi) **の原理**と言う．

(14) は，位置 $\boldsymbol{r}$ における「速さ」が $\frac{1}{\sqrt{E - U(\boldsymbol{r})}} \propto \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}$ で与えられる波に対するフェルマーの原理（本号「光学の原理は本当にエレガント？」参照）と形式的に同じ形をしており，量子論での物質波という考え方のヒントになった．

変分 (14) を実行すると

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{-\delta \boldsymbol{r}}{2\sqrt{E - U}} dl + \sqrt{E - U} \frac{d\boldsymbol{r}}{dl} d(\delta \boldsymbol{r}) \right) = 0$$

となる．第 2 項では $(dl)^2 = (d\boldsymbol{r})^2$ により $dl\delta(dl) = d\boldsymbol{r} d(\delta \boldsymbol{r})$ であることを用いた．この項を部分積分して被積分関数の $\delta \boldsymbol{r}$ の係数を0とおくと，軌跡の方程式

$$2\sqrt{E - U} \frac{d}{dl} \left(\sqrt{E - U} \frac{d\boldsymbol{r}}{dl} \right) = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{15}$$

が得られる．力 $\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}$ と軌跡の接線方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dl}$ を導入すると，(15) は

$$2(E - U) \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dl^2} = \boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}) \boldsymbol{e} \tag{16}$$

となる．一般に，軌跡の局所的な曲率半径を R とし，$\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dl^2} = \frac{\boldsymbol{n}}{R}$ とおくと，$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{e}$ に垂直な単位ベ

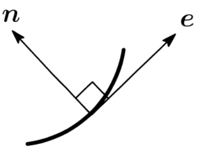
---

*5) 先に述べたラグランジアンの不定性 $L \to L + \frac{dF}{dt}$ は，$\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$ により，この結論に影響しない．

*6) 「最小作用の原理」とも呼ばれるが，実際には最小とは限らない．例えば文献 4) の 3-2 節を参照のこと．

*7) 変数変換自体には非自明な停留点が入り込まない状況を想定する．

クトル（主法線ベクトル）となる．



$\boldsymbol{F}$ の主法線成分を $F_n\boldsymbol{n}$ とし，$E-U=\frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2$ を代入すると (16) は

$$\frac{m\boldsymbol{v}^2}{R}=F_n$$

となり，曲線運動における法線加速度の関係式を再現する．

8. 結語

運動学としての力学は，ホロノミックな場合には，ハミルトンの原理に集約される．一方ラグランジアン自体を定めること，すなわち自然界に働く力，あるいはエネルギーがなぜ，如何なる形をとるかという問いは，本来力学の外に向けられるべきものである*8)．力学自体は，ラグランジアンの選択に物理的な自然さ，整合性を要請するに留まる．そのような要請の中で，各論に依らず，最も基本的で重要なものは，互いに等速直線運動する座標系ではすべての力学法則は同一であるという原理，**ガリレイ**（Galilei）**の相対性原理**であり，（非相対論的）古典力学全体を貫く指導原理と位置づけられる．

指導原理と整合する作用積分を設定し，作用原理に基づいて理論を展開するという構図は，現代物理学の多くの基礎理論の標準的スタイルになっている．

参考文献

1) H. Goldstein, "*Classical mechanics*", 2nd ed. Addison-Wesley (1980).
2) ランダウ・リフシッツ，『力学』，東京図書 (1974).
3) 山本義隆，『重力と力学的世界，古典としての古典力学』，現代数学社 (1981).
4) 江沢洋，『解析力学』，培風館 (2007).

（くにば・あつお，東京大学大学院総合文化研究科）

*8) 熱力学でも完全な熱力学関数を定めること自体は一般にその守備範囲になく，測定に基づく現象論や統計力学に拠る．

熱力学の原理

宮下 精二

熱力学の「熱」という量を扱う物理学である．自然の状態を表す量に「暖かいとか冷たいとか」という性質があることは間違いない．この性質は「温度」という量で表される．しかし，この量は，長いとか重いとかいう性質を表す「長さ」や「重さ」に比べて表すことが難しい．温度計で測っているのは，温度自身でなく温度計の中の液体の長さである．このように，温度とか熱は見えない量なので，物理学にとって少し扱いにくい対象である．

温度が違う物体を接触させたときに最終的にどの温度になるかという問題がある．その場合，物質の持っている熱という考え方をする．例えば，図 1 に示すように 20°C の水 1000 g を入れた容器 (A) に 50°C に熱した 2000 g の水の容器 (B) を接した場合の最終温度を求めてみよう．水 1 g を 1°C 温度を上げるのに必要な熱の量を 1 カロリー (cal) として，A は 0°C の状態に比べて，1000 × 20 cal，B は 0°C の状態に比べて，2000 × 50 cal，の熱量を余計に持つと考え，全体では 120000 cal あるので，これを全体の水で割り (120000 cal/3000 g)，最終温度は 40°C となる（ここでは容器の寄与は無視した）．この現象の中に熱力学の原理がある．さて，熱とは，温度とは何だろうか？

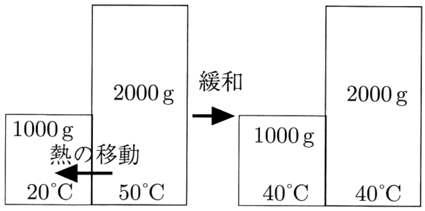


図 1　熱の移動．

この問題から読み取れることは，熱量は保存量のように見えることである．そこで，熱量という新しい量があり，その密度のようなものが温度と考えれば，上で考えた現象は説明できる．その考え方が，ラヴォアージュによって提唱されたエネルゲン（熱素）の考え方である．

まだ温度が定義されていないが，とりあえず暖かさの指標としてボイル・シャルルの法則を利用した気体温度計で決めた温度のイメージで話を進めよう*1)．ここで改めて，温度が普遍的に決められるための原理を考えよう．そのためには，次の自然法則が必要である．

それぞれの物体には温度が定義できるような状態，どのくらい暖かいかが決められるような状態（熱平衡状態）があり，物体を接触させるとそれぞれが同じ温度に落ち着く．つまり全系で熱平衡状態になる．

*1)　気体は暖めると膨張する．そこで，圧力を一定にしてその体積変化で温度を定義する．特に，気体の体積が外挿してゼロになる温度を絶対零度とし，温度を気体の体積によって $V = aT$ （a : 比例係数）として定義する．水の氷点を 0°C とし，沸点を 100°C とする摂氏の温度刻みを用いると，上で定義した $T = 0$ は −273°C となる．

このようにして気体温度が決められ，それを測る測定器は気体温度計と呼ばれる．そこで測っているのは温度ではなく体積であるが，この温度は，後で決める絶対温度と同じになる．

ここで，熱平衡状態を定義しなくてはならないが，普通それ以上変わらない状態に落ち着いた状態である．ただし，ミクロに見ると構成分子などは運動しているので「巨視的には自発的に変化しない状態」と言われる．この法則が成り立てば，どの系も上で定義した気体温度計に接することで温度が決められる．このように平衡状態状態には温度という属性があることになった．ここで仮定した状況が自然に存在することを「温度計可能の法則」とか．**熱力学第ゼロ法則**とか呼ばれる．

さて，次に熱を定義しよう．実際，熱自身の定義はできない．そこで，温度が上がると熱が流入したとする．物質は暖まりやすいものや暖まりにくいものがあるので，上で考察したように，物質1gの温度を1度変えるのに何gの水を1度変える必要があるかを，その物質の熱容量と呼ぶことにする．物質の持つ熱は熱容量 × 質量である[*2]．このように定義された熱は，図1で考えたように一種の保存量のように見なせる．物体の接触（巨視的な仕事が見られない変化）による変化を考える場合は，それで十分である．この熱の移動に関して次のような重要な自然法則がある．温度が違う2つの物体を接触させると，最終的には両者は同じ温度になる．この変化は一方的で自発的には元に戻らない．この現象は，熱という量を用いて次のように表現できる．温度が違う2つの物体を接触させると熱は一方的な方向に移動し，両方が同じ温度になったとき移動が終わる．つまり，

> 熱は温度が高いほうから低いほうに一方的に自発的に流れる．

というものである[*3]．この法則を**熱力学第二法則**と言う．この法則は「他に何の変化も残さず，熱を低温の物体から高温の物体に移すことはできない.」（クラウジウスの原理）とか「一つの熱源だけを利用して，その熱源の熱を仕事に変えることはできない.」（トムソンの原理）とも表現される．いずれも内容的には同じであるが，次に説明する仕事と熱の関係を含めた表現となっている．

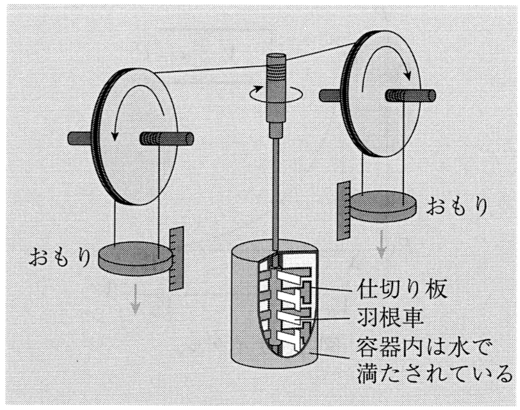


図2　ジュールの実験（宮下精二，新・数理科学ライブラリ–物理学1『物理学入門』（サイエンス社）より）．

さて，熱力学の第ゼロ法則と第二法則が出てきたが，もう一つ第一法則なるものがある．それは物理学的に定義された“仕事”と熱の関係である．熱素の考え方では熱は保存するが，仕事によって熱が発生できることも知られており，熱が保存量ではなくなった．物体をこすり合わせれば熱くなることは，誰でも知っているが，仕事によって熱が発生し，熱素の考え方がうまくいかないという認識はルンフォード伯が大砲を作るために金属を削っているとき発見された．その後，有名なジュールの熱と仕事の等価性の実験（図2）が行われ，仕事と熱の関係

$$1\,\mathrm{cal} = 4.2\,\mathrm{J} \tag{1}$$

が確立した[*4]．このことから，

> 熱自身（Q）は保存しないが，系にされる仕事（W）を含めるとその和が全エネルギー（E）として保存すること

がわかり，それを**熱力学第一法則**と呼ぶ．

熱も仕事も出入りする差は定義できるが，それ自身は熱平衡状態で一意的に決められる量ではな

---

*2）ここでは質量あたりの熱容量を考えたが，単位体積あたりの熱容量を考えることもある．また，熱容量は温度によって変わることもあるので，その場合は微小の温度変化に対して熱容量を決める．

*3）ここで，熱が流れ出すほうの温度を高いとする．

*4）現在では，熱もJ（ジュール）の単位で測られる．

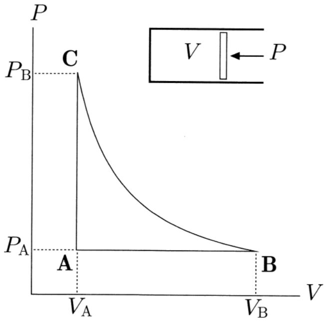


図 3　サイクル．

い．ここで，平衡状態で一意的に決められるかどうかという発想は少し難しい概念であるが，次のような例を考えるとその違いが明らかになるだろう．ちなみに，体積や圧力は平衡状態で一意的に決められる．実際，2 気圧の下での 1 リットルの酸素気体がピストンに入れられている場合，どのようにそれが用意されたかに関わらず，それの体積は 1 リットルであり，圧力は 2 気圧である．このように平衡状態で一意的に決められる量は状態量と呼ばれる．温度や粒子数なども状態量である．それに対し，熱や仕事はそうではない．

気体の状態を図 3 に示すように変化させた場合を考えよう．ここでは，初期の状態は系が圧力 P_{A} の下で熱源 A に接している状態である．これを等圧で熱源 B と接触させて加熱し体積を V_{B} に膨張させる（状態 B）．次に，等温（熱源 B に接したまま）で圧縮し体積をもとの値 V_{A} に戻す．この過程では圧力は増加する．どのように増加するかは，物質によって違う．例えば，理想気体の場合にはボイルの法則に従って PV を一定に保ちながら変化する．最後に，体積を一定に保ちながら熱源 A と接触させて冷却し，圧力をもとに戻す．そのとき，系はもとの状態に戻っている．この過程で系になされた仕事を考えてみよう．過程 AB では圧力 P_{A} で体積を $(V_{\mathrm{B}}-V_{\mathrm{A}})$ だけ変化させたのであるから，ピストンが外からされた仕事は $\Delta W_{\mathrm{AB}}=-P_{\mathrm{A}}(V_{\mathrm{B}}-V_{\mathrm{A}})$ である．この量は負であり，ピストンは外に仕事をしている．次に，過程 BC では，ピストンは押し込まれ，外から仕事

$$\Delta W_{\mathrm{BC}}=-\int_{V_{\mathrm{B}}}^{V_{\mathrm{A}}}P(V)dV \qquad (2)$$

をされている．過程 CA では体積変化はなく仕事は 0 である．これらからこのサイクル一周で系が外界からされた仕事の総量はサイクルを表す線で囲まれた部分の面積であり，ゼロでないことがわかるだろう（$\Delta W\neq 0$）．全エネルギーは状態量なので，サイクルの後同じ値に戻る．つまり，この一周の過程（サイクル）で $\Delta W+\Delta Q=0$ である．つまり，外界からされた仕事は，この過程で放出された熱の変化（$\Delta Q\neq 0$）で埋め合わされている．エネルギーのように閉じた経路での変化の和がゼロになる量は，変化の過程によらず値がそれぞれの状態で値が決められる．このような量，つまり状態量，の変化は完全微分と呼ばれ dE と書かれる．それに対し仕事や熱は，上で見たように状態量ではないので dW や dQ とは書かず，ΔW や ΔQ と書く．ただし，これらもちゃんとした物理量で，例えば圧力による仕事は

$$\Delta W=-pdV \qquad (3)$$

である．熱は $\Delta Q=dE-pdV$ である[*5]．通常平衡状態の性質を論じるには，これらの状態量を用いて行われる．

以上で熱力学を論じる準備ができた．これらの自然法則からどのような論理展開ができるかが，熱力学の本随である．普通，「熱力学」はこれらの法則から演繹される諸性質を意味すると思うので，ここでも上の法則からどのような論理展開がなされるのかについて説明する．

まだ温度が定義されていない．まず，温度に関する状態量を物理学的に定義しなくてはならない．上で述べた熱力学の法則には，何ら定量的な記述がないので式で表しにくい．そのために，「温度が違う 2 つの物体を接触させると，最終的には両者は同じ温度になる．この変化は一方的で自発的に

*5）　仕事は圧力，体積の組だけではなく，電気エネルギー $-Edq$（E：電場，q：電荷），磁気エネルギー $-HdM$（H：磁場，M：磁化）なども考えられ，一般には $-PdV-Edq-HdM-\cdots$ となる．ここでは，$-pdV$ で仕事を代表する．

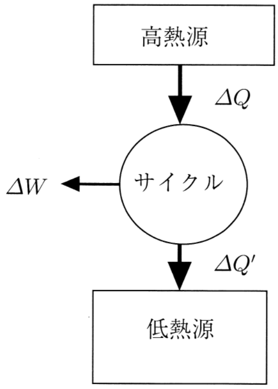


図 4　仕事.

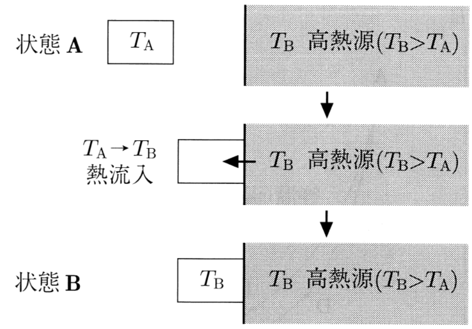


図 5　不可逆過程.

は元に戻らない.」という事実に着目し，状態変化の「可逆性」という考え方を導入する．つまり，温度差がある状況で熱が移動するともとに戻れないのであるから，その過程は「不可逆」である*6)．そのような過程を含まない過程が「可逆」である．

ここでは，普通の教科書に書いてあるサイクルという過程を利用して話を進める．サイクルとは系の状態をいろいろな操作で変化させるが最終的にはもとの状態に戻る過程である．図 3 はサイクルの例である．そこでは温度がそれぞれ T_A と T_B の 2 つの熱源があった．この過程での熱，および仕事の収支を考えてみよう．過程 AB では，系は熱を吸収しているのでその量を ΔQ_{AB} とする．次に，過程 BC では，一般に系は熱を吸収，あるいは放出する．その量を ΔQ_{BC} とする．ここで，吸収する場合の変化を正とする．ちなみに，理想気体の場合には $\Delta Q_{BC} = 0$ であるが，実際の気体では，正のものも負のものもある．最後に，過程 CA で放出した熱を $\Delta Q_{CA}(< 0)$ とする．サイクルでの内部エネルギーの変化は 0 であり，

$$0 = \Delta W_{AB} + \Delta W_{BC} + \Delta W_{CA} + \Delta Q_{AB} + \Delta Q_{BC} + \Delta Q_{CA} \qquad (4)$$

である．このサイクルで系が外界にした仕事の総量を ΔW，高熱源から吸収した熱の総量を ΔQ，低熱源に放出した熱の総量を $\Delta Q'$ とする．この様子は図 4 と表される．

*6)　また，あるいはそれと同等な効果をもたらす自由膨張過程なども「不可逆」である．

ここで，サイクルの仕事効率として

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q} \qquad (5)$$

を導入する．

上のサイクルは温度差がゼロでないところでの熱の移動を伴うので可逆ではない．一見，サイクルは右回りも左回りもでき可逆のように見えるが，熱源も含めて考えると可逆ではない．図 5 に示す上から下への変化は $T_A < T_B$ であるので可能であるが，下から上への変化は自発的には不可能である．状態 B に低熱源 A を接して熱を放出させて温度を下げることで過程 BA は実現できるが，これは熱源の様子まで含めて考えると過程 AB の逆過程ではないことを確認しよう（図 5）．

しかし，可逆なサイクルも存在する．そのサイクルは可逆な過程だけから構成される．可逆な過程としては，熱の移動を遮断した断熱過程，および熱の移動が同じ温度の系の間で行われる等温過程がある．これらの過程だけで作られるサイクルとしてカルノーサイクル（図 6）がある．この過程は，温度 T_1 での等温変化（膨張過程 AB），T_1 から T_2 への断熱変化（膨張過程 BC），温度 T_2 での等温変化（圧縮過程 CD），T_2 から T_1 への断熱変化（圧縮過程 DA）からなり，いずれの過程も可逆であるため，サイクル全体も可逆となる．

ここで，「可逆サイクルの仕事効率はすべてのサイクルの仕事効率の中で最大である.」という重要な性質がある．これは次のようにして示される．あるサイクル A（仕事効率 η_A）で高温側から熱 ΔQ を取って，外に仕事 ΔW をしたとする．そ

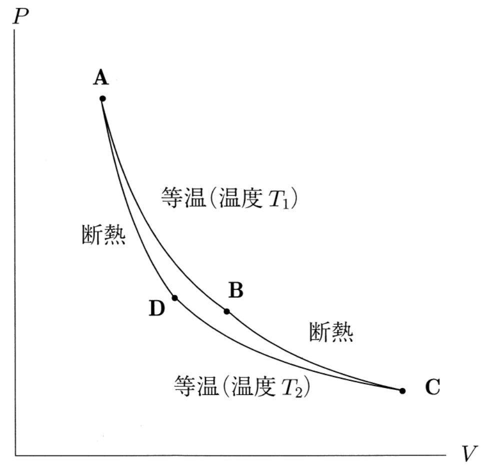


図 6　カルノーサイクル．

の仕事を用いて，可逆サイクル（仕事効率 $\eta_{\rm C}$）を逆に回し，高温側に熱 $\Delta Q'$ を戻したとする．ここで

$$\Delta W = \eta_{\rm A}\Delta Q = \eta_{\rm C}\Delta Q' \tag{6}$$

であるので，もし $\eta_{\rm A} > \eta_{\rm C}$ ならば $\Delta Q < \Delta Q'$ ということになり熱が低温側から高温側に流れたことになり，熱力学第二法則に反する．

このことから，仕事効率は 2 つの温度の間の関係を示す指標になることがわかる．そこで，2 つの熱源間の最大仕事効率を $\eta(T_1, T_2)$ と書くことにする*7)．

次に，3 つの異なる温度 $T_1 > T_2 > T_3$ を考え，T_1−T_2 間でカルノーサイクルで熱源 1 から熱 ΔQ_1 を取り出し，それで仕事 ΔW_1 をする，さらに，T_2−T_3 間でもカルノーサイクルで仕事 ΔW_2 を取り出すこととする．ただし，熱源 2 では熱源 1 から放出されてくる熱 $\Delta Q'_1$ とサイクルへ放出する熱 ΔQ_2 を等しいようにする．($\Delta Q'_1 = \Delta Q_2$) この過程全体では，熱源 1 から熱 ΔQ_1 を取り出し，仕事 $\Delta W_1 + \Delta W_2$ をして，熱源 3 に熱量 $\Delta Q'_2$ を放出したことになる．この仕事 $\Delta W_3 = \Delta W_1 + \Delta W_2$ を用いて，カルノーサイクルを逆回し，熱源 3 から熱源 1 へ熱 ΔQ_1 をくみ上げると，全体では何も起こらなかったことになるはずであり，

$$\Delta Q_1 = \eta(T_3, T_1)(\Delta W_1 + \Delta W_2) \tag{7}$$

でなくてはならない．ここで，

$$\frac{\Delta Q'_2}{\Delta Q_1} = \frac{\Delta Q'_1}{\Delta Q_1}\frac{\Delta Q'_2}{\Delta Q_2} \tag{8}$$

に注意して，関係

$$1 - \eta(T_1, T_2) = 1 - \frac{\Delta Q_1 - \Delta Q'_1}{\Delta Q_1} = \frac{\Delta Q'_1}{\Delta Q_1} \tag{9}$$

を用いると

$$1 - \eta(T_1, T_3) = (1 - \eta(T_1, T_2))(1 - \eta(T_2, T_3)) \tag{10}$$

の関係があることがわかる．この関係は，例えば

$$1 - \eta(T_1, T_2) = \frac{T_2}{T_1} \tag{11}$$

とすれば満たされる．一般には，任意の単調関数 $f(T)$ を用いて

$$1 - \eta(T_1, T_2) = \frac{f(T_2)}{f(T_1)} \tag{12}$$

とすれば満たされる．これは温度系の目盛りの打ち方の問題でどのような $f(T)$ を用いるかは重要でない．ここでは，(11) を採用する．この関係は，温度に関する順序付けができるということを意味しており，極めて重要である．つまり，ある基準系（水の三重点）の温度を決めると，他の系の温度を決めることができる．このようにして決めた温度を**熱力学的温度**と呼ぶ*8)．

このようにして暖かさを表す温度が定量的に決められたので，次に熱を状態量を用いて表すことを考えよう．ここで，またカルノーサイクルを考えよう．このサイクルでの熱の出入りは過程 AB で高熱源から熱を吸収し ($\Delta Q_{\rm AB} > 0$)，過程 CD で低熱源に熱を放出している ($\Delta Q_{\rm CD} < 0$)．これらの熱量は，この過程の熱効率および関係 (11) から，次の関係

$$\frac{\Delta Q_{\rm AB}}{|\Delta Q_{\rm CD}|} = \frac{T_2}{T_1} \tag{13}$$

*7)　まだ，温度は定義されていないが，温度が決まったらその値の関数として $\eta(T_1, T_2)$ が決まるという意味である．

*8)　大変素晴らしいことに，この温度は係数を合わせれば気体温度計の温度と一致する．

が得られる．これから

$$\frac{\Delta Q_{\mathrm{AB}}}{T_1}+\frac{\Delta Q_{\mathrm{CD}}}{T_2}=0 \tag{14}$$

の関係が得られる．すべてのサイクルはカルノーサイクルの組合せとして表せるので[*9)]，この関係は

$$\oint\frac{\Delta Q}{T}=0 \tag{15}$$

と一般化できる．この関係は $\Delta Q/T$ が全微分，つまり何らかの状態量の変化量を表している．この状態量を**エントロピー**と呼び，S で表す．

$$dS=\frac{\Delta Q}{T}. \tag{16}$$

言い換えれば，熱の変化は

$$\Delta Q=TdS \tag{17}$$

と表されることがわかった．この関係は，仕事が $\Delta W=-PdV$ と表されることと同等に，熱を状態量で表すことができることを意味しており，その重要性がわかるだろう[*10)]．また，不可逆過程が含まれると，関係 (14) は

$$\int\frac{dQ}{T}>0 \tag{18}$$

の形に表される[*11)]．このことから，自発的な熱の流れは高温側から低温側に一方的に起こるという熱力学第二法則は，自発的な変化はエントロピーを増大させるという形で表現され**エントロピー増大の原理**と呼ばれることもある．

これらによって，内部エネルギー U の変化は

$$dU=TdS-PdV \tag{19}$$

と表される．仕事として電気エネルギー，磁気エネルギーなどや，さらに，少し感じが違うが，粒子数 n を制御する化学ポテンシャル μ の組も取り入れ

$$dU=TdS-PdV-Edq-HdM-\cdots+\mu dn \tag{20}$$

の形に全内部エネルギーが表せる．この関係を熱力学の基礎方程式と呼ぶ．この関係，特に TdS の部分には，熱力学のすべての原理が凝縮されており，関係 (17) が，熱力学のエッセンスといえよう．この関係から，数学的変形を用いてすべての熱力学的関係が得られる．

ここで見てきたように，熱力学は自発的な熱の流れは高温側から低温側に一方的に起こるという熱力学第二法則によって，エントロピーなる量を導入することで構築される．このロジックは大変美しいものである．しかしながら，この原理は熱がどのように流れるかについては何も言っておらず，熱平衡への緩和の仕方についての原理はまだ知られていない．それに関して，いわゆる非平衡熱力学，あるいはミクロな立場からの非平衡統計力学として果敢な挑戦を続けられている．

（みやした・せいじ，東京大学大学院理学系研究科）

*9) 小さなカルノーサイクルを貼り合わせて任意のサイクルを作ることができる．ここでは一つ一つのカルノーサイクルごとに 2 つの熱源を用意しなければならないことに注意しよう．

*10) 一般に，$XdY+X'dY'+\cdots$ の形で表される量は，ある条件の下で AdB の形に表されることが知られている．その条件は，物理的に熱力学第二法則と等価であり，そのような考察によって (17) を $dE+pdV=TdS$ として導入する方法はカラテオドリ（Carathéodory）の原理と呼ばれる．

*11) 熱平衡状態では，すべての自発的変化は終わっており，どのような仮想的な変化に対しても決して (18) は成り立たず，$\int\frac{dQ}{T}<0$ である．この関係はクラウジウスの不等式と呼ばれる．

量子力学の原理を求めて



木村　元

1. はじめに

前世紀初頭，いわゆる前期量子論と呼ばれる量子力学誕生の前夜祭があり，古典物理学の破綻は誰の目にも明らかになっていた．プランクによる作用量子の導入を筆頭に，物質波などの新しい概念が提案され，輻射の問題から原子構造とスペクトルの関係に至るまで，新しい現象は次々と説明されていった．

残されたのは，これらの結果を一貫して説明する理論体系の構築であった．これは，シュレディンガーとハイゼンベルグによる——一見異なるが後に等価であることが示された—波動力学と行列力学によって達成された．そして，ボルンによる確率解釈とディラックによる変換理論などを経て，量子力学の完成は一応果たされることになる．その後，フォン・ノイマンによるヒルベルト空間と線形作用素論としての量子力学の公理化がなされ，物理学としても数学としても完璧な理論体系が打ち出された．

ひとたび理論が完成すると，豊かな構造は演繹の梯子をたどり一人歩きを始める．量子力学が予言する物理現象は，実験による検証に耐え続け，我々の期待を決して裏切ることはなかった．量子力学は，化学から生物学の基礎までを網羅し，現代技術の基盤を提供することになった．現在ではその偉大な成功に裏打ちされ，量子力学は物理学の基礎理論としての地位を確固たるものにしている．

以上は，ごく簡単な量子力学の歴史の光の部分である．一方，その成功の裏には，量子力学の闇と言われる部分が存在する．実際，量子力学ほど「理解に苦しむ」物理理論は物理学史上存在しなかった．アインシュタインのように，最後まで量子力学（の完全性）に反対し続けた者も少なくない．量子論の最大の擁護者であり，実証主義を徹底したボーアですら「頭がくらくらしないとしたら，あなたは量子力学を理解していない」のである．結局のところ量子力学は，現象の首尾一貫した説明と引き換えに，古典物理学の概念的基礎に大変革を迫ったのである．我々はもはや「観測していないときの電子の位置や運動量」について語ることは許されない．量子力学の標準的な解釈によると，観測とは独立に物理量の実在値を考えることには意味がない．パウリに言わせれば，そのようなことは「針の先に天使が何人座れるか」を問うことと同じである．

より慎重に“実在の要素”を検証する方法も提案された．アインシュタインらによる EPR 議論である．ところが，局所実在性に関するベルの定理とアスペらによる実験によって，また，文脈非依存的な隠れた変数を否定するコッヘン–シュペッカーの定理などによって，量子力学および我々の住む世界を（古典物理学のような）“素朴な実在論”に基づいて説明することは不可能であることわかっている[1)]．このある種の逆理を解くために，多くの偉大な頭脳が費やされてきた．しかし，解釈のレベルで量子力学は紛争を巻き起こし，現在に至っても統一的な意見は存在しない．特に，信念の相違に基づく論争に至っては，もはや物理学とは言えないのである．

本稿は，それでもなお量子力学の闇に光を当てる試みを紹介する．それは一言で表すと「量子力学の原理」を探求することである．この試みは，必ずしも量子力学の正しい解釈を示唆するものではない．むしろ，その深い階層よりも一段前に位置する問題である．それは，抽象的な哲学の問題ではなく，実証主義や操作論的な観点からも追求すべき課題であると思われる．

2. 問うべきは何か？

量子力学を徹底して追及した高林武彦は，量子力学と古典物理学の違いを次のように表した．「量子力学にあたっては，その数学的形式と，実験的に観測される事実および“物理的実在”の三者は，古典論のように三位一体的に密着した関係にはない」[2)]．果たして今後量子力学において“三位一体説”が復活する可能性はあるのだろうか？

前節で触れたように，少なくとも素朴な実在論は，量子力学と相反することが知られている．そもそも“物理的実在”の定義は個々人によって異なるので，誰もが納得する形で“物理的実在”を量子力学に取り入れることは難しいであろう．

では，数学的形式と観測事実の融合は可能であろうか？ 量子力学の数学的形式を説明するためには，ヒルベルト空間や線形演算子といった概念を避けて通るわけにはいかない．量子系には複素ヒルベルト空間が対応し，（純粋）状態と物理量はそれぞれベクトルと演算子によって記述される．初学者は大抵次のような疑問に悩まされる「なぜ状態はベクトルなのか？」「なぜ物理量は演算子なのか？」ここに，量子力学の数学的形式と観測事実の隔離が現れている．実際，このような問いに満足した答えを与えた者は誰もいない[*1)]．「数学的形式」と「観測事実」を融合する試みは，物理量の「q 数（演算子）から c 数（実数）への回帰」を意味するものではない．より広義に，「量子力学を―抽象的な数学形式ではなく―物理の言葉で記述すること」と考えてもよいだろう．換言すれば，ヒルベルト空間といった数学ではなく，物理の言葉で書かれた量子力学の公理（原理）が求められるのである．

この事情はしばしば「（特殊）相対性理論」との対比で説明される．ローレンツは，マイケルソン-モーリーの実験を説明するためにローレンツ変換と呼ばれる変換則を提唱した．これによって，実験を説明する“法則”が明らかになったものの，当時その変換の解釈に関して，エーテルの存在を中心に論争が巻き起こった．これに終止符を打ったのが若き日のアインシュタインである．彼は，余計な概念であるエーテルを払拭し，「光速度不変の原理」と「相対性原理」という単純な原理によってローレンツ変換を導出してみせたのである．特筆すべきことは，これらの原理が数学の言葉ではなく，物理の言葉で書かれていることである．アインシュタインは相対性理論を「物理原理」を土台に構築することができたのである．

表 1　相対性理論と量子力学の数学的形式と原理．

特殊相対性理論	$t' = \gamma(t - vx/c^2)$ $x' = \gamma(x - vt)$ $\cdots$	(A) 光速度不変の原理 (B) 相対性原理
量子力学	$[x, p] = i\hbar$ $i\hbar\frac{d}{dt}\lvert\psi_t\rangle = H\lvert\psi_t\rangle$ $\cdots$	量子力学の原理？

現時点の量子力学は，アインシュタイン以前のローレンツ変換と同じ段階にあるのではないだろうか？ 量子力学を説明するシンプルな物理原理があるのではないか？ という期待がごく自然に湧いてくる（表 1 参照）．

3. 物理原理を探求する意義

これまでに，「原理」を（数学における）「公理」に相当するものとして話してきた．すなわち，それから物理理論の体系が論理的に演繹できるものである．ただし，「公理」ではなく「原理」と書くことで，それが「物理の言葉」で記述されるべきであることを示唆している[*2)]．

公理に関する物理学者の意見は賛否両論ある．特に，物理理論自体が完成されていない場合は，初めから公理を探すことはむしろ効率が悪く，都合の良いところからスタートするほうが便利なことが多い．このことは，逆に，量子力学の原理探求の意義を明確にしている．我々は，量子力学の原理を探求するに当たり，個々の原理間の論理的な繋がりを理解するのである．

簡単な例を挙げて説明しよう．量子情報科学では，次の 2 つの事実が知られている：

(A)　未知な量子状態たちを複製（clone）することは一般に不可能である．

(B)　未知な量子状態たちを（確率 1 で）識別することは一般に不可能である．

これらは，量子暗号への応用を持つなど重要な性質であるが，両者は実は等価であることがわかる：実際，

---

*1)　例えば，径路積分量子化はより直感的に理解できると主張する者もいるが，それは確率振幅を用いている点で正準量子化と相違ない．

*2)　量子力学の原理として有名な「重ね合わせの原理」，「不確定性原理」，「相補性原理」，「対応原理」などは，必ずしも「量子力学の体系を導く原理」という位置にあるものではない．これらは標準的な教科書では大抵説明されているので，本稿で逐次説明するという方法はとらない．

状態が識別できるのならば，まず状態を同定して，それと同じ状態を準備することができる．すなわち，状態の複製が可能となる．逆に，状態を複製することができれば，複製を繰り返すことによって，状態のアンサンブル（独立同一分布）を準備することができる．アンサンブルがあれば—様々な物理量を多数回測定することで—状態の統計的相違を見出す確率をいくらでも1に近づけることができる．すなわち，異なる状態を識別することができる．

様々な現象に論理的な関連性を見出すことは，物理原理探求の重要な副産物であると同時に，それ自体が意義のある目的でもある．

4. 操作論的に自然な確率論

2節では，数学的形式と観測事実の融合として，量子力学の原理探求をかかげた．ここに“物理的実在”を介入することは難しい．必然的に，我々はひとまず実証主義（あるいは道具主義）の立場に立つことになる．

実際，次のことを確認しておくことが大切である．量子力学をどのように使って実験結果を説明するかという処方箋に関しては，物理学者の間で意見の相違はないのである．各種の解釈が対峙するのは，それに実在的な要素を持ち込むことによる．

量子力学（また，実験家が日々行っていること）を操作論的な観点から分析すると，(I) 量子状態の準備と (II)（物理量の）測定を行うものと考えられる．ここで，量子力学の予言が基本的に統計的なものであることに注意しよう．量子状態が決まっており，ある物理量を測定するならば，どのような確率で測定値を得られるかについての規則（ボルンの規則）が定まっている．

したがって，量子力学を一種の確率論と見なすことができる．ところが，操作論的に自然ではあるが，量子論とは異なる確率論を構築することもできる．どのような原理が，量子力学（また我々の世界）を特殊な位置に規定するのであろうか？

問題を明確にするために，まずは，操作論的に自然な確率論[3,4]の構成を原理ベースで展開しよう．まず，基本的な概念として，状態と物理量があり，その統計を決める規則が定まっているものとする*3)：

[原理 1]　状態 s の下で，物理量 A を観測すると，測定値 a を得る確率 $p(a|s,A)$ が定まる（$p(a|s,A) \geq 0$, $\sum_a p(a|s,A) = 1$）.

あらゆる測定によって（統計的に）区別がつかない状態たちは同一視される*4)：

[原理 2-a]　状態 s_1, s_2 に関して，任意の物理量 A と測定値 a に対して $p(a|s_1,A) = p(a|s_2,A)$ が成立するならば $s_1 = s_2$.

同様に，あらゆる状態の下で区別がつかない物理量たちは同一視される：

[原理 2-b]　物理量 A_1, A_2 に関して，任意の状態 s と測定値 a に対して $p(a|s,A_1) = p(a|s,A_2)$ が成立するならば $A_1 = A_2$.

状態 s_1 と s_2 が準備可能な場合，確率 $q \in [0,1]$ で s_1 を準備して，確率 $1-q$ で s_2 を準備することができると考えるのは自然である．このような準備の下で物理量の測定を行うならば，確率の性質（排反事象の確率の和法則および条件付き確率の性質）により，次の原理が要請される：

[原理 3]　（確率混合の原理）状態 s_1, s_2 が存在するならば，任意の $q \in [0,1]$ に対して，次を満たす状態 s が存在する：任意の物理量 A と a に対して，$p(a|s,A) = qp(a|s_1,A) + (1-q)p(a|s_2,A)$.

原理 2-a より，このような状態 s は，s_1, s_2 と q に対して一意に決まる．これを記号 $s = \langle q; s_1, s_2 \rangle$ で表すことにする．

ここで，エフェクトの概念[6]を導入すると便利である．状態の集合（状態空間）を $\mathcal{S}'$ とする．$\mathcal{S}'$ から実数値への写像 e は，任意の s_1, $s_2 \in \mathcal{S}'$, $q \in [0,1]$ に対し，$e(\langle q; s_1, s_2 \rangle) = qe(s_1) + (1-q)e(s_2)$ を満たすとき，$\mathcal{S}'$ 上のアファイン汎関数と呼ばれ，特にその値域が $[0,1]$ に含まれるとき $\mathcal{S}'$ 上のエフェクトと呼ばれる．任意の $s \in \mathcal{S}'$ に対して，$u(s) = 1$ を満たす u を単位エフェクトと呼ぶ．$\mathcal{S}'$ 上のアファイン汎関数とエフェクトの集合をそれぞれ $\mathcal{A}(\mathcal{S}')$, $\mathcal{E}(\mathcal{S}')$ とすると，$\mathcal{A}(\mathcal{S}')$ は関数空間として実ベクトル空間であり，$\mathcal{E}(\mathcal{S}')$

*3)　以下，簡単のため，測定値が有限個の場合に限定する．

*4)　実際，状態の定義は「あらゆる物理量の測定に関して同じ統計予言を与える（実験）準備の同一視」で与えられる[5,6]．

は $A(\mathcal{S}')$ の凸部分集合*5)であることに注意する．

原理 2-b および原理 3 より，物理量の測定をエフェクトによって特徴付けることができる．実際，物理量 A の測定値の集合を $\{a_1,\ldots,a_m\}$ とすると，原理 3 より $p(a_i|s,A):=e_i(s)$ は m 個のエフェクト e_i を定める（確率の規格化条件は $\sum_i e_i = u$ となる）．また，原理 2-b より，物理量を特徴付けるのは，任意の状態に対する統計的性質であるため，エフェクト（たち）による物理量の同定が可能となる*6)：以降，物理量を，エフェクト $e_i \in \mathcal{E}\,(\mathcal{S}')$ の集合で $\sum_i e_i = u$ を満たすものとする．また，物理量 A を $A=(e_i)$ と表し，状態 s の下で A を測定したとき，i 番目の測定値を得る確率が $e_i(s)$ で与えられると約束する．

ここまでは，操作論的に自然な要請だけに従って理論を構築してきたが，エフェクトの導入によって，物理量の集合に自然と線形構造（関数としての和やスカラー倍）が導入されたことに注意しよう．また以下に見るように，状態空間には，$\langle q; s_1, s_2\rangle$ が s_1 と s_2 の凸結合：$qs_1+(1-q)s_2$ と見なせる自然な線形構造が入ることがわかる．これにより，一般性を失うことなく状態空間を凸集合と仮定することができるのである[4]：

定理 1. 原理 1〜3 を満たす確率論を考える．このとき，実ベクトル空間 V が存在して，$\langle q; s_1, s_2\rangle \simeq qs_1+(1-q)s_2$ が成立するように，状態空間 $\mathcal{S}'$ を V の凸（部分）集合に埋め込むことができる．

（証明） V を $\mathcal{E}(\mathcal{S}')$ 上の実汎関数の集合とすると，関数空間として V は実ベクトル空間である．ここで，埋め込み写像 $f:\mathcal{S}'\to V$ を，$f(s)(e):=e(s)$ $(s\in\mathcal{S}',\ e\in\mathcal{E}(\mathcal{S}'))$ で定義する．特に，任意の $e\in\mathcal{E}(\mathcal{S}')$ に対し，$f(\langle q; s_1,s_2\rangle)(e) = e(\langle q; s_1,s_2\rangle) = qe(s_1) + (1-q)e(s_2) = qf(s_1)(e)+(1-q)f(s_2)(e)$ が成立するので，$f(\langle q; s_1,s_2\rangle) = qf(s_1)+(1-q)f(s_2)$ を得る．また，原理 2-a により，f の単射性が成立し，原理 3 より，$\mathcal{S}:=f(\mathcal{S}')$ は V の凸部分集合であることがわかる．■

すなわち，状態 s を $f(s)$ で表現することで，状態空間 $\mathcal{S}$ を凸集合と見なせるのである*7)．

状態空間 $\mathcal{S}$ の端点*8)は純粋状態と呼ばれ，端点でない状態は混合状態と呼ばれる．すなわち，純粋状態は，非自明な確率混合による状態準備ができない，という意味で純粋と呼ばれる．

このような一般的な確率論の中で，古典確率論と量子力学は特殊な位置を占めることに注意しよう：

[（有限）古典確率論] 標本空間 $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_d\}$ を考える．状態は根元事象 $\omega_i\in\Omega$ 上の確率分布 (p_i) で与えられる．よって状態空間は $\mathcal{S}_C=\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^d\,|p_i\geq 0, \sum_{i=1}^d p_i = 1\}$．純粋状態は，ある根本事象が確実に起こる状態である（すなわち，d 個の $\boldsymbol{p}^{(\mu)}=(\delta_{\mu 1},\ldots,\delta_{\mu d})\in\mathcal{S}_C$ $(\mu=1,\ldots,d)$）．

幾何学の言葉を用いると，古典確率の状態空間は単体（線分，三角形，四面体，⋯）である．すなわち，任意の状態 $\boldsymbol{p}=(p_1,\ldots,p_d)\in\mathcal{S}_C$ は一意的な端点分解を持つ：$\boldsymbol{p}=\sum_{\mu=1}^d p_\mu \boldsymbol{p}^{(\mu)}$．

古典確率論は，原理的な特徴付けが可能である．例えば，原理 C「すべての純粋状態は識別可能である（または，すべての純粋状態を（同時に）複製することができる）」によって完全に規定される[8]：

定理 2. 古典確率論 = 原理 1〜3 + 原理 C.

（略証） 原理 1〜3 を要請し，凸集合の状態空間を $\mathcal{S}$ とする（簡単のため純粋状態を $\{s_1,\ldots,s_l\}$（有限個）とする）．原理 C により，物理量 $A=(e_i)_{i=1}^m$ $(m\geq l)$ が存在して，$e_i(s_j)=\delta_{ij}$ が成立する（すなわち，測定値が i であれば，状態が s_i にあることが確実にわかる）．さて，任意の状態 $s\in\mathcal{S}$ の端点分解を $s=\sum_j p_j s_j = \sum_k q_k s_k$ $(p_j, q_k\geq 0, \sum_j p_j = \sum_k q_k = 1)$ とする．両辺にエフェクト e_i を作用させると，$p_i=q_i$ を得るので，端点分解の一意性が示される．定義より，状態空間は単体となり，古典確率論を形成する．■

[量子力学] 量子系には複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$*9)が対応し，状態はそれ上の密度演算子，すなわち単位トレースを持つ正演算子により記述される．よって，状態空

*5) 実ベクトル空間 V の部分集合 W は，任意の $w_1,w_2\in W, q\in[0,1]$ に対して，$qw_1+(1-q)w_2\in W$ を満たすとき，凸（部分）集合であると呼ばれる．

*6) エフェクトによる物理量の特徴付けでは，測定値が陽に現れないことに注意．測定値の相違によっても物理量を区別する場合は，測定値の集合を別途表記すればよい．

*7) また，確率によって近さを測るような自然な位相を導入することができ，一般性を失われずに，状態空間はコンパクト凸集合と見なすことができる[7]．

*8) 凸集合 W の元 w が「ある $w_1,w_2\in W$ と $q\in(0,1)$ に対して $w=qw_1+(1-q)w_2$ ならば，$w=w_1=w_2$」を満たすとき，端点と呼ばれる．

*9) 以後，$\psi,\phi\in\mathcal{H}$ の内積を $\langle\psi|\phi\rangle$ と記す．

間は $\mathcal{S}_Q = \{\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid \rho \geq 0, \mathrm{Tr}\,\rho = 1\}$*10) である．純粋状態は一次元射影演算子で特徴付けられる．すなわち純粋状態は，ある単位ベクトル $\psi \in \mathcal{H}$ を用いて，$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$*11) と表すことができる状態である（$\psi$ は状態ベクトル*12) と呼ばれる）．

$\mathcal{S}_Q$ が単体でない凸集合であることは直ちに確認できるだろう．量子状態空間の幾何学をイメージすることは難しいが，例えば 2 準位量子系では，密度演算子と等価な Bloch ベクトルによる状態表現において，状態空間は $\mathbb{R}^3$ 内の単位球で表すことができる（純粋状態は球の表面である）*13)．

前述したとおり，物理量はエフェクトによって特徴付けられる．密度演算子による状態表現では，物理量は POVM（Positive Operator Valued Measure）測定*14) で記述されることが導かれる[10)]：

定理 3. 量子力学系の物理量 $A = (e_i)$ $(e_i \in \mathcal{E}(\mathcal{S}_Q), \sum_i e_i = u)$ に対して，POVM (E_i) が一意に存在し，$e_i(\rho) = \mathrm{Tr}(\rho E_i)$ が成立する．

（略証） アファイン性より，任意のエフェクト e は $\mathcal{S}_Q$ 上から $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上に線形拡張される．$\{\psi_i\}$ を $\mathcal{H}$ の完全正規直交系として，線形演算子 $E := \sum_{kl} e(|\psi_k\rangle\langle\psi_l|)|\psi_l\rangle\langle\psi_k|$ を定義すると，$e(\rho) = \mathrm{Tr}(\rho E)$ $(\forall\rho \in \mathcal{S}_Q)$ が成立する（$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ を代入すれば，$0 \leq E$ も得られる）．以上を，物理量の各エフェクト e_i に適用すれば，題意は直ちに示される．■

さて，標準的な量子力学の公理によると，物理量はエルミート演算子 A で表現される．また，ボルンの規則により，密度演算子 ρ の下で物理量 A を測定するとき，測定値 a（A の固有値に限られる）を得る確率は $p(a|\rho, A) = \mathrm{Tr}(\rho P_a)$ で与えられる（$P_a = P_a^\dagger = P_a^2$ は，固有値 a に関する固有射影．A のスペクトル分解は $A = \sum_a aP_a$）．これは，一般の POVM 測定の中で特殊な位置を占め，PVM（Projection Valued Measure）測定と呼ばれている*15)．実は物理量を PVM 測定に限定しても，孤立系の時間発展の公理（シュレディンガー方程式）と合成系の公理（テンソル積ヒルベルト空間）を要請することで，任意の POVM 測定が（間接測定によって）物理的に実現可能な測定であることがわかる[10)]．

紙数の都合上，詳しい説明は省略するが，上述した一般的な確率論をベースとして系の時間発展，測定後の状態変化，また合成系を議論することもできる[4,6,8,11)]．例えば，系の時間発展は，確率混合の原理に基づいて，状態空間上のアファイン写像によって記述される．これは量子力学では，トレース保存の（完全）正写像に対応する．これに量子力学の孤立系の時間発展および合成系の公理を加えると，任意のトレース保存の完全正写像が物理的に実現可能であることもわかる[6)]．また，量子力学系の測定過程は，（完全）正写像値測度（または測定作用素）により記述されることが示される[6,11)]．これらの論理的な関連性を理解することが，量子力学の原理探求の第一歩となる．

5. 量子力学の原理探求の試み

前節では，操作論的に自然な確率論（原理 1～3）を導入したが，古典確率論も量子力学もその中で特殊な位置を占めている（例えば，四角形の状態空間を持つ確率論[7)]は，古典でも量子でもない）．古典論が原理ベースで理解されたように，量子力学も原理に基づいて理解することは可能であろうか？ 本節では，これまでに行われてきた量子力学の原理探求の試みを幾つか紹介する．

このような試みの中で最も有名なものは，量子論理であろう．古典の命題論理は，論理積 ∧ と論理和 ∨（および否定）演算に基づき，ブール代数で特徴付けられることが知られているが，フォン・ノイマンとバーコフは，量子力学の原子命題たちも，ある種の論理構造を持つことに気が付いた[12)]．ここで，原子命題とは「物理量（エルミート演算子）A を測定するときに，測定値が a である」と述べることができるもので，対応する固有空間（または固有射影 P_a）で特徴付けられる．（標準）量子論理とは，$\mathcal{H}$ の閉部分空間（または射影演算子の集合 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$）で表現され，オーソモジュラー束 $L_Q \simeq \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を形成する[13)]．ここで，論

---

*10) $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ 上の線形演算子の集合，Tr は演算子のトレースを表す．演算子の正値性 $\rho \geq 0$ は $\langle\psi|\rho\psi\rangle \geq 0$ $(\forall\psi \in \mathcal{H})$ で定義される．

*11) 任意の $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ に対し，$|\psi\rangle\langle\phi|$ は次のように定義される線形演算子である：$\xi \in \mathcal{H}$ に対して $|\psi\rangle\langle\phi|\xi := \langle\phi|\xi\rangle\psi$．

*12) 伝統的な量子力学の教科書では，純粋状態（状態ベクトル）のみ説明される場合が多い．

*13) 高次元の状態空間の幾何学は文献 9) を参照．

*14) （離散的な）POVM とは，$E_i \geq 0$，$\sum_i E_i = \mathbb{I}$ を満たす線形演算子 E_i の集合である

*15) 読者は $\{P_i\}$ が POVM の条件を満たすことを確認せよ．

理積は部分空間の共通部分，論理和は部分空間の和空間（の閉包）で与えられ，特に，オーソモジュラー性「$W \subset V \Rightarrow V = W \vee (V \wedge \neg W)$」*16) を満たす（$\neg W$ は W の直交補空間）．ただし，不確定性原理があるために，古典論理とは異なって分配則が一般に成立しない．

標準量子論理 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ から $[0,1]$ への写像 μ が，(i) $\mu(0) = 0$, (ii) $\mu(\mathbb{I}) = 1$, (iii) $PQ = 0 \Rightarrow \mu(P+Q) = \mu(P) + \mu(Q)$ を満たすとき，μ を $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の状態と呼ぶ．グリーソンは，量子論理をベースとして自然な要請を満たす状態は，密度作用素による統計分布に限られることを示した[14]:

定理 4. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の次元が 3 以上のとき，任意の状態 μ に対して，密度演算子 ρ が存在し，$\mu(P) = \mathrm{Tr}(\rho P)$ を満たす．

したがって，標準量子論理の構造を導きさえすれば，密度作用素による状態表現が導入されることがわかる．これに対してマッキーは，前節までに展開した原理 1～3 に加え，幾つかの自然ではあるが数学的な要請を加えることにより，2 値物理量の構造に自然とオーソモジュラー性が入ることを指摘した[3]．現在では，さらなる数学的仮定を要請することで，ヒルベルト空間に基づく標準論理が導かれることが知られている[15,16]．しかし，完全に物理原理に基づく導出は未だ成功していない．

また，ジョルダンによって創始された代数的なアプローチがある[17]．このアプローチでは，物理量の代数構造を起点として，状態をそれ上の期待値汎関数として導入する．この枠組みでは，超選択則を取り入れた古典・量子のハイブリッド系が自然と入り，また，無限自由度を厳密に扱うことができるために，現在では代数的場の量子論として発展している[18]．他方で，物理量の和の存在やジョルダン積の分配則の成立に関する物理原理の不在など，量子力学の原理探求としては道半ばの状態にある．代数的アプローチはヒルベルト空間に基づく量子力学に比べて，より操作論的であると見なされることが多いが，なぜ物理量に C*代数などの構造が入っているのか？ という問いに究極的には答えていないのである．

このような過去の試みに対し，最近の量子情報科学の発展は，物理原理を「情報の言葉」で表す可能性を促している[19]．例えばクリフトンたちは，「超光速通信の禁止」*17)，「状態の（相関を含む）複製不可能性」および「安全なビットコミットメントの禁止」を量子力学の原理として提案している[20]．しかし彼らは初めから C* 代数の構造を仮定しており，代数構造の起因を説明をしていない．また，ダリアーノによる物理原理の探求[21]や，ハーディによる（数学的 に自然な要請に基づく）量子力学の定式化がある[22]．また，合成系を記述するテンソル積の構造が，「超光速通信禁止」，「局所物理量たちによる全体系の状態決定」に基づいて導出されることが知られている[8]．他にも，量子力学の原理探求の一貫として，一般的な確率論を土台とした「安全な鍵配送」[23]や「状態識別問題」[7]，「テレポーテーション」[24]などが議論されている．

6. 終わりに

前節で簡単に触れたように，昨今の量子情報科学の目覚しい展開は，量子力学の原理探求に新しい光を当てている．中には「安全な鍵配送」と「安全なビットコミットメントの禁止」によって量子力学が決定されると予想する者もいる．他方で，マーミンのように「神が世界を創るときに，ある種の秘密の活動が可能であり，他のものが禁止されるといったことを基本原理に採用するとは，とうてい思えない」という意見もある[25]．しかし，ふさわしい原理かどうかは将来議論されるべきことであり，仮にどのような種類の「物理原理」であっても，それによって量子力学を説明することができるのであれば，非常にエキサイティングなことではないだろうか？

原理探求の観点からは，量子力学は未だ冬の時代にある．近い将来，原理という花が咲き，量子力学にも暖かい春の時代が訪れることを願い，本稿の結びとする．

*16) ヒルベルト空間の言葉では，V の W による直和分解に相当する．

*17) No-Signaling 条件とも呼ばれる：「（互いに遠くにある）物理系 A と B の合成系 $A+B$ において，A 系でどの物理量を測定したとしても―その測定値を伝えない限り―B 系の状態に影響がない」ことの要請である．

参考文献

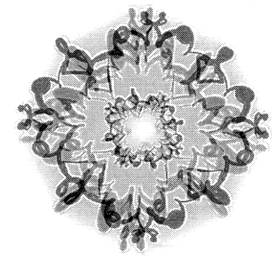
1) A・ペレス，『ペレス 量子論の概念と手法』（大場一郎・山中由也・中里弘道訳），丸善 (2001).
2) 高林武彦，『量子論の発展史』（吉田武監修），ちくま学芸文庫 (2002).
3) G. Mackey, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Dover, 1963).
4) S.P. Gudder, *Stochastic Method in Quantum Me-*

chanics (Dover, 1979).
5) G. Ludwig, *Foundations of Quantum Mechanics I, II* (Springer, 1983).
6) K. Kraus, *States, Effects, and Operations* (Springer, 1983).
7) G. Kimura, *et al.*, *Phys. Rev. A* **79**, 062306 (2009); K. Nuida, *et al.*, arXiv:0906.5419.
8) H. Barnum, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 240501 (2007); arXiv:0805.3553.
9) G. Kimura, *Phys. Lett. A* **314**, 339 (2003); G. Kimura, A. Kossakowski, *Open Sys. Info. Dyn.* **12**, 207 (2005).
10) M. Ozawa, *Rep. Math. Phys.* **18**, 11 (1980); M. Ozawa, *Ann. Phys.* **311**, 350 (2004).
11) B. Davies, J.T. Lewis, *Comm. Math. Phys.* **17**, 239 (1970); M. Ozawa, *J. Math. Phys.* **25**, 79 (1984).
12) G. Birkhoff, J. von Neumann, *Ann. Math.* **37**, 823 (1936).
13) 前田周一郎,『束論と量子論理』槇書店 (1980).
14) A.M. Gleason, *J. Math, Mech.* **6**, 885 (1957).
15) M・ヤンマー,『量子力学の哲学』(井上健訳), 紀伊国屋書店 (1983).
16) C. Piron, *Helv. Phys. Acta*, **37**, 439 (1964); S. Pulmannova, *Int. J. Theor. Phys.* **35**, 2309 (1996).
17) P. Jordan, *et al.*, *Ann. Math.* **35**, 29 (1934); I.E. Segal, *Ann. Math.* **48**, 930 (1947).
18) R. Haag, *Local Quantum Physics* (Springer, 1992); 荒木不二洋,『量子場の数理』岩波書店 (2001).
19) C.A. Fuchs, quant-ph/0205039.
20) R. Clifton, *et al.*, *Found. Phys.* **33**, 1561 (2003).
21) G.M. D'Ariano, arXiv:0807.4383.
22) L. Hardy, quant-ph/0101012.
23) J. Barrett, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 010503 (2005).
24) H. Barnum, *et al.*, arXiv:0805.3553.
25) D・マーミン,『マーミン 量子コンピュータ科学の基礎』(木村元訳), 丸善 (2009).

(きむら・げん,
産業技術総合研究所情報セキュリティ研究センター)

相対性理論

光速度不変の原理と等価原理



加藤　光裕

1. はじめに

大学に入ってはじめに学ぶ物理学といえば，力学と電磁気学だ．基本中の基本ということで，しっかり叩き込まれる．実際，日常生活で目にする自然現象は，これで大抵は理解できてしまう．力学はニュートンの3法則が基本法則であり，電磁気学はマクスウェル方程式にその法則がまとめられる．

しかしこの2つの理論体系は，相対性という観点から見ると，少々性質を異にしている．この違いが，アインシュタインによる特殊相対性理論を生み出すきっかけになったのである．その結果，ニュートン力学は一部変更を受け，電磁気学のほうへ歩み寄る形で統一的な物理法則の体系が完成する．このとき重要な手懸りとなったのは，**光速度不変の原理**であった．

アインシュタインは，特殊相対論発表の後，さらに考察を進め，10年後には一般相対性理論を発表する．これは重力の理論として画期的なものであったが，その根底にあるのは，**等価原理**である．

このアインシュタインによる2つの金字塔（もちろん，彼はこの他にも量子力学や統計物理学の基礎にとって重要な寄与を残していることは言うまでもない），特殊相対性理論と一般相対性理論のそれぞれの要である2つの原理，光速度不変の原理と等価原理に光を当てて相対性理論の成立を振り返ってみよう．

2. ニュートン力学と電磁気学

まずは，ニュートン力学と電磁気学の基本性質を思い出してみよう．ニュートン力学は次の3法則を基本法則とする体系であった．

第1法則（慣性の法則）　他からの作用がないとき，質点は等速度運動をする．

第2法則（運動方程式）　力 $\boldsymbol{F}$ がはたらくとき，質量 m の質点の運動は次の方程式に従う．

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}.$$

第3法則（作用反作用の法則）　2つの物体が互いに及ぼす力は，大きさが等しく逆向きである．

ここで，質点とは質量を持ち大きさが無視できる物体であり，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ は質点の位置を指し示す位置ベクトルである．我々の棲む3次元空間では，位置ベクトルは質点の位置座標 $(x(t),y(t),z(t))$ を成分とする3次元ベクトルで表され，時間 t の関数として変化し得る．これが質点の運動であり，微分方程式としての運動方程式が解ければ運動が理解できたことになる．

これから分かるように，具体的に運動を記述するには座標系の取り方が大事だ．しかし，例えば座標の原点をどこにとるかというようなことは，運動の本質とは関係がないはずだから，法則の形はそのことによらないようになっていてほしい．

実際，ニュートンの運動方程式は，$\boldsymbol{r}$ を定数ベクトル $\boldsymbol{r}_0$ だけずらして $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0$ に置き換えても，形は変わらない．このことを並進不変性と呼ぶ．また，座標軸の間の直交性を保ったまま向きを変える，つまり回転を施してみると，個々の成分の値は変わっても，運動方程式の形自体は変わらない．これを**回転不変性**と呼ぶ．これらの性質は，電磁気学のマクスウェル方程式においても成り立つ．

さて，ニュートンの第1法則（慣性の法則）が成り立つ座標系を**慣性系**と呼ぶ．第2法則は，第1法則が前提になっている．すなわち慣性系において成り立つ法則である．慣性系の取り方はもちろん一意ではない．先ほどの並進や回転によって移り合う座標系もまた慣性系である．それだけではなく，ある慣性系に対して，一定の速度 $\boldsymbol{v}_0$ で動いていくような座標系もまた慣性系である．つまり，並進の際に考えたベクトル $\boldsymbol{r}_0$ を定数ではなく時間 t の1次関数 $\boldsymbol{v}_0 t$ にまで広げても，$\frac{d^2\boldsymbol{r}_0}{dt^2}=0$ のため，運動方程式はやはり形が変わらない．

このように，慣性系である限りは具体的な座標系の取り方によって法則の形が変わらないという性質を**特殊相対性**と呼ぶ．このことは重要である．なぜならもし特殊相対性が成り立たなければ，運動法則の形が座標系によって違ったものになり，観測者は自分の運動状態を知らなければ，自分の使っている座標系で成り立つ運動方程式を書き下せないからだ．

今のように（時刻 $t=0$ で座標原点を一致させて1次変換の形で），$\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}_0 t$ と置き換える操作を**ガリレイ変換**と呼ぶ．ニュートンの運動方程式は，ガリレイ変換の下で形を変えないという意味で，特殊相対性を満たすのである．

一方，電磁気学におけるマクスウェル方程式は，電場 $\boldsymbol{E}$ や磁束密度 $\boldsymbol{B}$ といったベクトル場に対する偏微分方程式である．今その具体形を詳しく知る必要はないが，重要な帰結として，これらの電磁場が空間中を波として伝播することが予言される．特に物質中のみならず真空中をもこの電磁波は伝わっていく．そして真空中の電磁波の速度はマクスウェル方程式に現れる定数を用いて一意に決まる．その大きさを c と書くことにしよう．

このことは，当時の物理学体系に重大な問題を突きつけた．ニュートンの法則が素朴に満たしたガリレイ変換に対する相対性から考えると，速度は一般に慣性系によって値が違う．ある観測者（に付随する座標系）から見て速度 $\boldsymbol{u}$ で運動する物体や波は，速度 $\boldsymbol{v}_0$ で運動する観測者（に付随する座標系）から見ると $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_0$ と合成された速度を持つ．すると，ある座標系で大きさ c の速度で進む電磁波は，運動する観測者から見ると合成された速度を持つはずである．しかし，マクスウェル方程式からは真空中の電磁波の速度は一意に決まってしまう．とすると，マクスウェル方程式はある特定の座標系における法則であって，別の慣性系に移ると形を変えると考えないと辻褄が合わなくなる．すなわち，マクスウェル方程式はガリレイ変換の下での相対性を満たさないということになる．

では，マクスウェル方程式がそのままの形で成立する特別な座標系（**絶対静止系**と呼ぶ）はどこにあるのか．地球に固定された座標系なのか，太陽系に固定されているのか，我々の銀河に固定されているのか，はたまた宇宙全体の質量中心に固定されているのか．地球や太陽系はそのような絶対静止系に対してどのような運動（絶対運動）をしているのか．もっとも典型的な電磁波は光であるから，光の速度を様々な状況で測定することで，地球の絶対運動を検出することが重要な課題となったのである．

3. 光速度不変の原理と特殊相対性理論

地上での実験でファラデーの法則やアンペールの法則など電磁気の法則は実験精度の範囲内でよく成り立っている．マクスウェル方程式はそれをまとめたものであるから，補正を受けるとしても極めて小さいはずである．地球の絶対静止系に対する速度の大きさを v としたとき，それによる法則への補正の効果はもとの大きさを1として高々オーダー $O(v/c)$ 程度のものだろうと考えるのは自然だ．地球の絶対運動としての進行方向とそれ

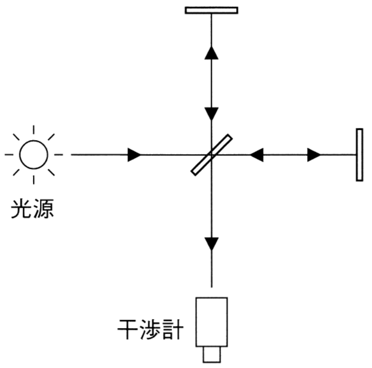


図 1　マイケルソン–モーレーの実験の概念図.

に垂直な方向とでは，光の速度に差が生じるはずだから，光速度の方向依存性を $O(v/c)$ レベルの精度で検出すればよい．しかし，様々な実験を繰り返しても，$O(v/c)$ 程度の光の速度のずれを検出することはできなかった．

決定的な結果を与えたのはマイケルソン–モーレーの実験だ．彼らはさらに高精度の $O(v^2/c^2)$ の精度までのずれを検出できる装置（図 1）を用いて，光の速度の方向依存性を調べた．光源から出た光をハーフミラーで互いに垂直な 2 つの光路に分け同じ距離を走らせた後，再びハーフミラーで一緒にして干渉計で観測する．もしも両者で時間差があれば，位相がずれて干渉縞が観測されるはずだ．結果は，やはりずれは検出できなかったのである．

この結果をどう理解するか．ずれは検出できないのだから，地球が特別で絶対静止系に固定されているのだろうか．天動説の復活のような考え方は，様々な他の観測事実から見て極めて不自然だ．そこで辻褄合わせのような理論がいろいろと提唱されたりもした．

アインシュタインのアプローチは，全く違っていた．地球の絶対運動を検出できないのだから，そもそも絶対静止系など考えても意味がない．むしろ，観測事実に立脚して，真空中の光の速度は，観測者の運動にも光源の運動にもよらず，常に一定値 c であるということを原理にして，理論体系を再構築すべきと考えた．つまり**光速度不変の原理**だ．そうすると，慣性系の間の座標変換は，ガリレイ変換ではあり得ず，むしろマクスウェル方程式の形を変えない変換でなければならない．それが，**ローレンツ変換**なのである．光の速度はある時間の間に光が進んだ距離を測ることで測定されるのであるから，光速度不変の原理は空間座標のみならず時間の概念に関しても根本から見直す必要を迫る．アインシュタインは，注意深く考察を加えることにより，時間はあらゆる座標系で共通に流れるものではなく，ある観測者から見て同時に起こった 2 つの事象も他の観測者から見ると同時ではないということが起こり得ることを示した．従って，時間は空間座標と同じく観測者（慣性系）ごとに定義され，それらの間の関係（座標変換）は，光速度不変の原理を手懸りに決定されると考えた．こうして得られたローレンツ変換は，マクスウェル方程式の形を変えない．電磁気学の法則は，ローレンツ変換の下での特殊相対性をみたしていたのである．

ニュートンの運動方程式は，ガリレイ変換の下で形を変えないが，ローレンツ変換の下では形を変えてしまうので，慣性系間の座標変換としてローレンツ変換を採用する限りそのままでは特殊相対性をみたさない．かくしてアインシュタインは運動方程式を特殊相対性を満たすように変更した．その結果，単に方程式の変更以上の革新的結果をも得ることになった．その最たるものが，エネルギーと質量の等価性 $E = mc^2$ であろう．

また，時間と空間は別々のものではなく，ローレンツ変換をはじめ，まとめて扱う必要があることがわかった．こうして時間と空間を合わせた 4 次元の超空間を**時空**と呼ぶようになり，極めて見通しよくローレンツ変換の下での特殊相対性をみたす理論を構成できるようになったのである．

4. 等価原理と一般相対性理論

再びニュートンの運動方程式に戻ろう．ニュートン力学の範囲内においても，これは慣性系で成り立つ方程式であった．慣性系ではない座標系に移ったときは，どうすればよいか．慣性系から見て今考えている座標系の原点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_0$

としよう．質点の位置ベクトルを慣性系および非慣性系でそれぞれ $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'$ とすると，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_0$ であるから，非慣性系での運動方程式は，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} = \boldsymbol{F} - m\frac{d^2\boldsymbol{r}_0}{dt^2}$$

と書ける．つまり，本来の力 $\boldsymbol{F}$ 以外に見かけの力 $-m\frac{d^2\boldsymbol{r}_0}{dt^2}$ がはたらいているように見える．これは**慣性力**と呼ばれるが，左辺にあった質量 m に比例している．

ところで，万有引力つまり重力は，物体の質量に比例し距離の自乗に反比例した大きさの引力である．このときの質量は運動方程式の左辺にあった質量と同じものであろうか．重力が比例する質量を重力質量，運動方程式の左辺の質量を慣性質量と呼ぼう．両者は概念的に別物であって一致するべき先験的理由はない．例えば電荷の間にはたらくクーロン力は，両者の電荷の大きさに比例しているのであって，慣性質量とは無関係である．重力だって力のはたらく大きさを決めるいわば重力の“電荷”に相当するものがあるはずでそれが重力質量である．慣性質量は力の種類とは無関係な慣性の大きさを決める量に過ぎないはずだ．両者が本当に一致するのかどうかは実験的に確かめる必要がある．

物体の電荷の総量は物質の量に比例するから，当然慣性質量に比例する．しかし，単位質量あたりの電荷は，物質が違えば一般には違い得る．様々なイオンを思い浮かべれば納得できるだろう．それと同様に，重力質量も当然物体の慣性質量に比例はするであろう．しかし，両者が概念的に一致しているためには，物質の種類によらずその比例係数が全く同じである必要がある．比例係数が物質によらず共通であれば，単位をうまく定義することでその係数を 1 にできるからである．

これを実際に確かめたのが，エトヴェスの実験（図 2）である．全く重さの等しい 2 つの物体を用意する．重さが等しいとは，両者にはたらく地球の重力の大きさが等しいということである．この 2 物体を両端に付けた棒を重心の位置に括り付けた針金で吊るす．両者の重量は等しいので棒は釣り合って水平を保つことができる．しかし，両者の慣性質量がわずかでも違っていれば，両者にはたらく慣性力には差が出るはずだ．地上での実験では，地球の自転による遠心力がはたらくが，この遠心力は慣性力の代表格だ．すると水平分力に差ができて棒を吊るした針金はねじれが生じる．物質をいろいろと取り替えてねじれの度合いを比較すれば，物質による慣性質量と重力質量の比例係数に差があるかどうかがわかるというわけだ（正確には遠心力の垂直分力もあるので，それを考慮して解析する）．こうした実験を行った結果，どのような物質を持ってきても差を検出することはできなかった．すなわち，重力質量と慣性質量は実験精度の範囲内で同じものだということが確かめられたのである．

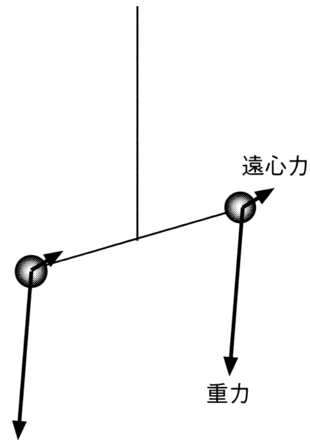


図 2　エトヴェスの実験の概念図.

アインシュタインは，重力質量と慣性質量が等価であるということを基本原理に据え（**等価原理**），それに導かれて重力の理論を構築した．アイデアはこうだ．非慣性系の場合のニュートンの運動方程式に戻ってみよう．重力質量と慣性質量が等しければ，力 $\boldsymbol{F}$ として重力を考えた場合，うまい座標系をとることで，重力を慣性力によって少なくとも局所的には打ち消すことができる．実際，飛行機を重力加速度と同じ大きさの加速度で降下させて（つまり自由落下させて）宇宙飛行士の訓練用に無重量状態を作り出したりしている．さて，このことを逆手に取れば，局所的には重力を慣性力として表すことができるということでもある．

慣性力の出現は座標系の性質であるから，これは重力を座標系の性質ひいては時空の幾何学に帰着させようという試みでもある．しばしば，アインシュタインの一般相対性理論が重力を幾何学として表現したと言われるのは，このことを指している．重力の下での粒子の運動は，重力を生み出す時空の測地線に沿っての一般化された慣性運動に他ならないのである．

実際には，ニュートンの運動方程式ではなく，特殊相対性理論による力学から出発する．そして座標変換によって局所的には慣性系での方程式に一致すること，また非慣性系も含む一般の座標変換（一般座標変換）においても方程式の形が変わらないこと（一般相対性）を課すことによって，最終的な理論体系を構築した．この際に，リーマン幾何学という数学を用いることで見通しよく理論が構成できることを示した．それは，空間や時間方向の距離を決める計量という数学的量を基本的な変数として用い，時空の曲がりという形で重力の様子が記述される．星やブラックホールの周りの重力場の様子もすべては計量によって表されるのである．

5. おわりに

読者の皆さんの中には，相対性理論というと専門家が扱うような特殊な状況や宇宙を相手にするときしか関係がないと思っている方も少なくないと思われるが，実はそうではなく，我々は身近なところで相対性理論のお世話になっている．カーナビや携帯電話に組み込まれているGPSに基づく位置情報サービスが，現在これほどまでの精度で利用できるのは，実は相対性理論のおかげなのだ．GPSは，地球を周回する複数の人工衛星からの電波を捉え，その時間情報から距離を割り出し，位置を決定する．当然，光速度すなわち電波の速度は，人工衛星や携帯電話の運動によらないことを利用している．それだけでなく，さらに地球重力場の効果を取り入れた計量を用いて，より正確な距離を割り出すことによって，現在のような極めて高い精度の位置情報が得られるのである．もしかすると，これは相対性理論が極めて高い精度で成り立っていることの最も身近な証拠と言えるのかもしれない．

（かとう・みつひろ，東京大学大学院総合文化研究科）

流体に成り立つ原理



高木　隆司

1. はしがき――法則・定理・原理

自然現象の研究で，筋道の通った推論をする際に必要になるものに，**法則**，**定理**，**原理**と呼ばれる基本的な知見がある．これらは，「…は…である」というように明快な文章で表現される（このような文章を，一般に**命題**と呼ぶ）．これら3種類の命題には，次のような違いがある．

法則とは，観察結果の積み重ねから共通の性質を抜き出して，それを簡潔に述べたものである．それと矛盾する現象が見出されたら，その法則は破れる（あるいは修正を強いられる）．定理とは，前提となる命題から，厳密な論理によって導かれたものであり，前提の命題が正しい限りこの定理も正しい．原理とは，法則や定理のようにしかるべき手続きを経て導かれたものではなく，科学者が直感的に思いつくことにより提案される．したがって，その検証がなされない限り真偽は不明のままであり，この段階のものは**仮説**と呼ばれることもある．

法則や定理は，科学者になるためのトレーニングを積めば，誰でも導くことができる．一方，原理を主張するには，自然現象に対する深い洞察力が必要なので，誰でもできるというわけではない．したがって，ある原理を主張して，それが真実で普遍性が認められたら，科学者にとっては最高の栄誉である．なお，ある原理が後に観察事実によって実証されたら，あるいは別の命題から証明されたら，それは法則あるいは定理に変身する．しかし，原理を主張した科学者に敬意を払って，原理という名前が残る場合が多い．

近代になって主張された重要な原理には，アインシュタインによる光速不変の原理，ハイゼンベルクによる不確定性原理がある．これらは，光の本質，原子の世界という，人間の五感の及ばない世界で成り立つものであり，確かに天才の技といえる．

ところで，筆者が長年つきあった流体力学という分野では，原理と呼ばれるものが少ない．それは，ほとんどの流体現象が巨視的なものであり，実験観察が比較的容易なので，原理を主張する前に実験的に検証されてしまうからであろう．歴史をさかのぼっても，流体に関するよく知られた原理は，アルキメデスの原理，パスカルの原理くらいしかない．

なお，それほど知られていないが，ゆっくり流れる粘性流体で成り立つ原理がある．それは，実現の流れでは，現実にはない仮想的な流れと比べると，粘性によるエネルギー消失がより小さいというものである．言い換えれば，粘性流体は，なるべくエネルギーを失わないように流れている．

この性質は，流体を支配する方程式に基づいて証明できるので，本当は原理ではなく定理というべきである．ところが，多くの自然現象で，エネルギー消失のような何らかの量を最小にするように起きるという考え方をする場合がしばしばある．

例えば，光の経路は光の伝達時間が最小になるように決まる（フェルマーの原理）．このような考え方は科学者たちの感性にマッチするので，仮に数学的に証明されたとしても原理という名前がつく場合があるのである．この証明の中で**変分法**という数学的な手続きを用いるので，何かが最小になるという原理は，しばしば**変分原理**と呼ばれる．

以下の節では，アルキメデスの原理，パスカルの原理，および変分原理について述べる．

2. アルキメデスの原理

アルキメデスは，BC. 287–212 頃，シチリア島のシラクサに住んでいた数学者・物理学者である．アルキメデスの原理は，彼の著書『浮体論』に記述されている．この原理について調べようとすると，アルキメデスのよく知られたエピソードが必ず出てくる．

彼が公衆浴場で湯船に体を沈めたとき，身体と同体積の湯があふれ出すことを発見し，「Eureca!（発見した）」と叫びながら全裸で街中を走ったという話である．彼は，金の王冠に銀が混じっていないか検査するよう，王から頼まれていた．そこで，王冠と同じ重さの金塊，銀塊を用意し，王冠も含めてこれら 3 つの物体を水で満たした容器に沈めたところ，あふれた水の量は金塊では少なく，銀塊では多く，王冠ではそれらの間にあった．これから，王冠の材料は金と銀の混合であることがわかった．

ところが，この検査法には浮力が関係しない．もっとも，これらの 3 つをひもでぶら下げて水に沈め，重さを測れば，浮力の違いによってやはり検査が可能である．しかし，アルキメデスが行った検査は，ウィトルウィウスの『建築書』によると，あふれた水の体積を測ったとあり，やはり浮力は関係しないようである（文献 1, 2)）．

アルキメデスが「Eureca!」と叫んだとき，いったい何を発見したのであろうか．身体の体積だけの水があふれ出るということは，少し考えれば当り前であり，この程度のことで彼が興奮したとは思えない．筆者が想像するに，少しずつ体を沈めていくと，それに応じて足の裏に感じる体重が減少することに，まず気づいた．次に，体重の減少が，あふれた水の量と関係していることに気がついた．水があふれるのは，自分の体が水を押しのけたからである．したがって，水中の物体は，それが押しのけた水の重さだけ軽くなるというアルキメデスの原理を得た．この発見なら，興奮するだけの価値は十分ある．

さて，王冠の検査をするとき，最初は浮力を利用しようと思ったかもしれない．しかし，王冠や金塊銀塊の体積を測れば良いので，結果的にはアルキメデスの原理を使わずに検査を終わったという次第であろう．蛇足であるが，アルキメデスが全裸で街中を走っても，周囲の人々はそれほど驚かなかっただろうとのことである．なぜなら，当時，戸外で働く奴隷たちも全裸だったそうだから．

3. パスカルの原理

ブレーズ・パスカルは，1623–1662 という比較的短い生涯を送ったフランスの科学者・哲学者である．パスカルの原理は，彼の著書『液体平衡論』に述べられている文章によれば，「周囲を密閉した流体の表面の一部に加えられた圧力は，あらゆる方向に対して，そのままの強さで伝えられる」というものである（文献 3)）．これは，他の著書『大気の重さについて』とともに 1648 年に執筆され，彼の死後，1663 年に刊行された．彼が，静止した流体の性質に関する研究を行った動機は，当時キリスト教の勢力と対抗しながら始まった真空の存在に関する研究であった．

1646 年に，イタリアのトリチェッリによって行われた実験の情報がフランスに伝わってきた．片方を閉じたガラス管に水銀を満たし，開いた口を下にして水銀を入れた容器に直立させた．すると，水銀の柱は 760 mm より高くはならず，その液面の上に何もない空間が生じた（図 1 参照）．管の中には水銀以外はなかったから，この空間は真空のはずである．パスカルは，同年にこの実験の追試

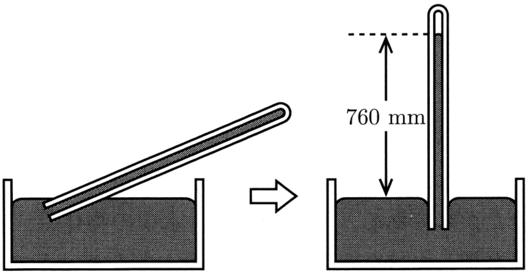


図１　トリチェッリの実験.

を公開で行い，キリスト教関係者にも見せた（文献 3)）.

ガリレイの没年である 1642 年からわずか数年という時期であったが，フランスのキリスト教関係者はこのような研究を弾圧しようとはしなかったようである．パリのクレルモン学院院長のノエル神父は，科学的な議論によって対抗した（彼は，昔の教え子デカルトの影響を受けていたそうである）．彼は，古代の四元素説（火・水・土・気の 4 つで物質が構成される）に基づいて，四元素のうちの火，あるいは気がガラスの微細な隙間から管内に浸透して，水銀の上の空間を充填したのだろうと反論した．これに対してパスカルは，自明な公理や原理から導かれた規則に拠らなければ，正当な議論はできないと反論した．四元素説は自明ではないというわけである．これでは水掛け論が続くことになる．パスカルは，別の方法によってノエル神父に対抗した．

1648 年，パスカルは水銀柱の高さが 760 mm になる理由を説明しようとして，大気の重さによって水銀がこの高さだけ押し上げられたという仮説を立てた．この仮説を実証するために，クレルモン市の義兄に頼んで，近くのピュイ・ド・ドーム山の山頂と山麓でトリチェッリの実験を行うよう頼んだ（パスカルは健康を害していたので自分ではできなかった）．この実験は成功し，山頂では山麓に比べて水銀柱の高さが小さくなった．自然が真空を嫌うとしたら，山頂でも山麓でも同じはずだから，この高さの差の説明にはならない．水銀柱の高さは，水銀の液面にかかる大気の重さが原因であるから，水銀柱の上の空間は真空以外には考えられない．パスカルは，この結果をもとに，1648 年に『液体の平衡に関する大実験談』という大げさな表題の報告書を刊行し，これによってパスカルの主張は認められた．

ところで，大気の重さの差が水銀柱の高さの差を生んだと主張するには，大気が水銀表面を押す圧力がそのままの強さで管の下部に伝わっていなければならない．パスカルは，そのことに前から気がついていたと思われるが，液体内部の圧力平衡の研究に取り組んだのは，真空の実験が一段落した直後である．これが，先に挙げた『液体平衡論』として結実したのである．

知識人たちが真空を嫌うかどうかは，文化に大きく依存すると思われる．キリスト教の教義は，物質が存在しないところには神の支配が届かないので，真空はあり得ないと考えた．ところが，東洋の代表的な思想である仏教では，そのようにはっきりと割り切らないで，空という概念を主張する．これは，無，泡，腫瘍などを意味するサンスクリット語の sunya の漢訳であり，ある空間を占めるが中身が希薄なものを示す．あらゆるものは，「因縁」という因果関係によって存在するのであり，それ自身が絶対的な意味で存在するのではないと言う．一方，空と言っても何もないわけではなく，因縁というものが存在する．

現代の物理学では，真空の存在は認めているが，電磁波がその中を伝わるし，重力によって空間のゆがみが生じるので，真空も自然法則の支配を受ける．パスカルの原理も，透明で何の変化も見られない水中に圧力の伝播という現象を見たのであり，真空中を伝わる場に似ている．これらは，東洋思想にある意味でつながっているようである．

4. 流れの変分原理

上に述べた 2 つの原理は，静止した液体に関するものであるのに対し，これから述べる変分原理は運動している流体に関するものである．

粘性をもつ流体のゆっくりした流れは，ストークス方程式，および連続の式に支配される．以下

の話の都合上，これらの式を示しておく．

$$\mu\triangle u_i = \nabla_i p, \tag{1}$$

$$\nabla_i u_i = 0. \tag{2}$$

ここで，u_i は流速ベクトルの分布，p は圧力分布であり，空間変数（x_i）の関数である．μ は粘性率，∇_i は x_i についての偏微分，$\triangle = (\nabla_1^2+\nabla_2^2+\nabla_3^2)$ はラプラシアンである．同じ添え字が2度続くと，その添え字に関する和を取るという規則を採用している．

式 (1) は，遅い粘性流における圧力分布と流速分布の関係を表す．より一般的なナヴィエ・ストークス方程式で慣性の効果を表す項を無視すると，この方程式になる．式 (2) は，流体が膨張や圧縮をしないことを表し，連続の式と呼ばれる．流体を囲む境界で（無限遠も境界の一つと見なす）ある境界条件を満たすような流れは，式 (1), (2) の解として求まり，この解は一意的である．

ここで，境界条件と連続の式 (2) を満たすが，ストークス方程式 (1) は満たさない非現実的な流れも考える．この流れを現実の流れと区別するために，u_i' とする．u_i' は一意的ではなく，無限にある．

一般に（非現実の流れも含めて），流れ分布 u_i が与えられたら，その流れの中で粘性によって生じる単位時間当たりのエネルギー損失は，

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu\int(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)^2 \mathrm{d}V \tag{3}$$

によって計算される．ここで，ストークス方程式の解によるエネルギー損失を Φ，非現実の流れ分布によるエネルギー損失を Φ' とする．

このとき，

$$\Phi' \geqq \Phi \tag{4}$$

であることが証明されている（文献 4, 5)）．すなわち，現実の流れは，エネルギー損失を最小にするような分布を選んでいるのである．この結果とストークス方程式の解の一意性は，1868 年にヘルムホルツによって導かれた（文献 4)）．証明された命題であるが，これが変分原理と呼ばれることはすでに述べた．

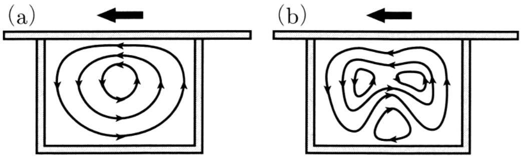


図2　境界条件と連続の式を満たす2つの流れ．(a) は現実的な流れ，(b) は非現実の流れ．

この変分原理を直感的に把握するために，一つのイラストを図2に示そう．これは，箱の中の流体中に，上の壁を水平に動かすことによって流れが誘起される場合である．(a) の現実的な流れは，(b) の非現実的な流れに比べて単純で滑らかな分布をもつ．式 (3) で定義されるエネルギー損失は，流れの勾配が効くので，(a) の滑らかな流れの方が損失も小さいのである．

この変分原理の逆，すなわちエネルギー損失が最小になるような流れは，ストークス方程式を満たすかという問題がある．少し考えるとそれは無理であることがわかる．なぜなら，エネルギー損失の式 (3) には流れ分布 u_i しか含まれていないが，ストークス方程式には，それとは別の従属変数である圧力 p が含まれている．したがって，p と u_i の関係を設定しなければストークス方程式にはたどり着かない．ところが，p と u_i の関係を示す式は，ストークス方程式自身なのである．

2007年に筆者は，圧力が流体に与える仕事率と，それによって生じた流れによるエネルギー損失の差が最小になるという条件を設定してみた．圧力分布によって流体が受ける単位体積当たりの力は，$F_i = -\nabla_i p$ で与えられるので，単位体積の流体がうける仕事率は，$-\nabla_i p \cdot u_i$ であり，これと単位時間当たりのエネルギー損失の差 I は

$$I = \int -\nabla_i p \cdot u_i \mathrm{d}V - \Phi \qquad (5)$$

で計算される．p と u_i の関数形を変えたとき（このように関数形を変えることを**変分**と呼ぶ），I が最小値になる（より正確には停留値を取る）ために，p と u_i が満たすべき条件を求めたところ，首尾よくストークス方程式，および連続の式が導かれた（文献6)）．この結果は，流れを駆動するために加えられた仕事が，なるべくエネルギー損失に使われるように流れが決まるということを意味する．

なお，ストークス方程式が成り立つ場合は，式 (5) の I と式 (3) の Φ が一致するので，式 (5) がより一般的な量である．

5. その他の変分原理

散逸を伴ってゆっくり起きる現象については，粘性流の他にいくつかの変分原理が知られている．以下に，それらを手短かに紹介しよう．

キルヒホッフの法則と発熱最小の原理

外部電力によって抵抗を含む回路網に流れる電流には，次の2つからなるキルヒホッフの法則が成り立つ．第一は，回路のすべての接点において，流入する電流の和と流出する電流の和は等しい．第二は，回路網内の任意の閉じた回路について，抵抗のところでの電位差を合計すると0になる．

キルヒホッフの法則で決まる電流分布では，第一の法則を満たす条件で電流分布を自由に変えた場合（非現実的な電流分布）と比べて，回路全体の発熱量がより小さい．逆に，発熱量を最小にする電流分布を求めると，それはキルヒホッフの法則を満たす．結局，電流分布は，エネルギー消失を小さくするよう決まるのである．詳細は，文献7, 8)を参照されたい．

拡散現象の変分原理

ある媒質中に含まれている物質が，その濃度 n の勾配に比例する速さで拡散する場合について，エントロピー生成最小の原理が成り立つ．これは，もっと一般的な場合についてプリゴジンらによって提案された理論の応用例である（文献9, 10)）．

図3に示すように，閉じた領域の境界で n の値 n_{W} の分布が与えられたとしよう．領域内に生じる濃度分布を支配する法則は拡散方程式である．

拡散の駆動力は濃度の勾配（$-\nabla_i n$）であり，それによる拡散流は $q_i = (-D\nabla_i n)$（D は拡散率）である．これらの積の積分 I をエントロピー生成速度と呼ぶ．すなわち，

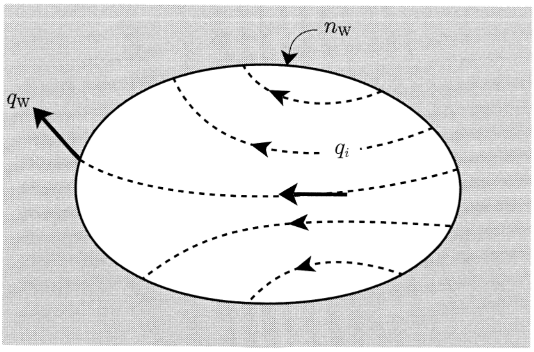


図 3　境界上の濃度分布によって領域内に生じる拡散の流れ.

$$I = \int(-\nabla_i n) q_i \mathrm{d}V = \int D(\nabla_i n)^2 \mathrm{d}V. \quad (6)$$

この I を最小にするような n の分布を求めると，それは，定常状態での拡散方程式

$$D \triangle n = 0 \quad (7)$$

を満たすことが示される．すなわち，拡散現象は，エントロピー生成が最小になるように起きているのである．

ここで，エントロピー生成速度の意味を考えてみよう．回路を流れる電流の場合は，抵抗の両端の電位差と，そこを流れる電流の積がエントロピー生成速度であり，発熱を通してエントロピーが増加する．一方，定常な拡散では，領域内部では何も状態変化は起きていないので，内部でのエントロピー量は増加していない．エントロピー増加は境界で起きる．境界上で高濃度のところから物質が流出し，低濃度のところに流入するからである．

濃度の関数としてエントロピーを表す式，

$$S = -k_{\mathrm{B}} n \log n \quad (8)$$

を用いて（k_{B} はボルツマン定数），境界におけるエントロピーの増加速度を求めると，それは領域内でのエントロピー生成速度に等しいことが示される．こうして，拡散現象は矛盾なく理解することができる．

熱伝導の変分原理

熱伝導は拡散と似ているので，n を温度 T に，D を熱拡散率 k に置き換えれば，拡散について行った議論が熱伝導にそのまま成り立つ．式 (6) がエントロピー生成速度を表し，式 (7) が定常な熱伝導方程式になる．

ここまでは良いのだが，境界におけるエントロピー増加量を計算すると，困った事情が生じる．境界におけるエントロピー変化は，$\mathrm{d}S = -q_{\mathrm{W}}/T_{\mathrm{W}}$ で与えられる．ただし，q_{W} は境界を通して流出する熱流量（流入の場合は負の値），T_{W} は境界の温度分布である．この増加量を境界上で積分すると，境界内のエントロピー生成速度と一致しないのである．その理由は，完全には理解していない．

現在，この不一致で悩んでいて，多少の一進一退はあるが，実質はこの段階でストップしている．ここでは，これ以上深入りしないことにしたい．

6. あとがき

本論では，流体に関する原理をいくつか紹介した．アルキメデスの原理とパスカルの原理は，すでに確立されているし直感的に理解できるので，読者も気軽に読めたであろう．筆者も気軽に書けた．

アルキメデスは，てこの原理も唱えていることを考えると，名の知れた物理学者としては世界最初の人かも知れない．ちなみに，世界最初の数学者はピタゴラス（BC. 6–5c.），世界最初の総合的な科学者は，古代エジプトでピラミッドを作り始めたイムホテプ（BC. 27c.）だろう．

パスカルは，ライバルのデカルトとしばしば比較される．デカルトが抽象的な思考に陥ることがあるのに対して，パスカルは常に実証的であった．そのためか，デカルトは哲学者，パスカルは物理学者と言われる．どちらも，両方の分野を手がけたのであるが．

流れや拡散，熱伝導などは，未解決の問題も含まれていて，かなりややこしい．特に熱力学に関する部分は，どこか間違っていないかと心配して，かなり神経を使う．しかしながら，仮に間違ったことを言ったとしても，読者の刺激になるかもしれないと考えて，あえて書いた次第である．悪しからず，ご了解を願いたい．

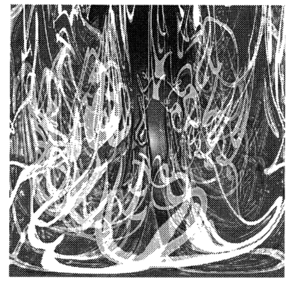
なお，熱伝導におけるエントロピー生成速度に関して，以前，北原和夫氏に相談に乗ってもらったことがある．この機会に感謝の気持ちを表したい．

参考文献

1) マルクズ・ウィトルウィウス・ポリオ：『建築書』（生活社，1943），再刊：（東海大学古典双書，1969）．
2) 田村松平：『ギリシャの科学』（中央公論社，1980）．
3) 前田陽一編：『パスカル』世界の名著シリーズ（中央公論社，1978）．
4) H. von Helmholtz: *Verh. des Naturh.-med. Vereins zu Heidelberg*, **5**, (1868) 1 (*Wissenschaftliche Abhandlungen*, **1**, 101).
5) G.K. Batchelor: *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge Univ. Press, (1967). Sect. 4.8.
6) R. Takaki: Variational principle to derive the Stokes equations, *Fluid Dyn. Res.*, **39**, No.7, (2007) 590–594.
7) 高木隆司：『形の数理』（朝倉書店，1992）．
8) 平川浩正：『電磁気学』（培風館，1968）．
9) P. Gransdorff and I. Prigogine: *Physica*, **30**, (1964) 351–374.
10) P. グランスドルフ，I. プリゴジン：『構造・安定性・ゆらぎ』（みすず書房，1977）．

（たかき・りゅうじ，神戸芸術工科大学）

光学の原理は本当にエレガント？



久我　隆弘

1. 光学の原理いろいろ

光は最も身近な存在（しかも素粒子！）であるため二千年以上も前から多くの研究者（古くは哲学者）の興味の対象となってきた．光に関する最も古い原理は恐らく紀元前4世紀のユークリッド（エウクレイデス）の「**直進の原理**」であろう．現代人から見れば当り前すぎて「美しい」と感動する対象には入らないかもしれないが，ユークリッド幾何学の基礎を築いたと考えれば素晴らしい原理だと言えるはずだ．ただ，一般相対論を手にした現代人はこの原理が成立しないことがあることも知っている．

時代が下って次に登場してくる原理は**フェルマーの原理**（1657），「光は所要時間（光路長）の最も短い道筋を進む」であろう．これにより光の屈折についても説明できるようになり，幾何光学という学問体系の基礎が完成したという位置づけである．ただ後に詳述するが，この原理もその後いくらかの変更を余儀なくされることになる．

そして波動光学の分野で基礎となっているのは**ホイヘンス–フレネルの原理**である．図1に示すように，ホイヘンスは2次波という概念を導入し（1678），光の直進，反射，屈折を説明した．ある光源から発せられた光（1次光）のある時刻 t における波面（波の等位相面，例えば波の山の位置を結んだ面）上の各点が2次光源となり，それぞれの点から新しい波が広がる．これらの波面の包絡面が次の波面となるという考えである．その後フレネルは2次波どうしの干渉効果を取り入れ光の回折現象を精確に説明した．

このホイヘンス–フレネルの原理だが，図1のような定性的な説明であれば恐らく高校生でも納得できる原理だろう．しかし実際に，ある光源Sから発せられた光が衝立上に開けられた開口 S_1 を通り，背後にあるスクリーン上のある場所Qでの

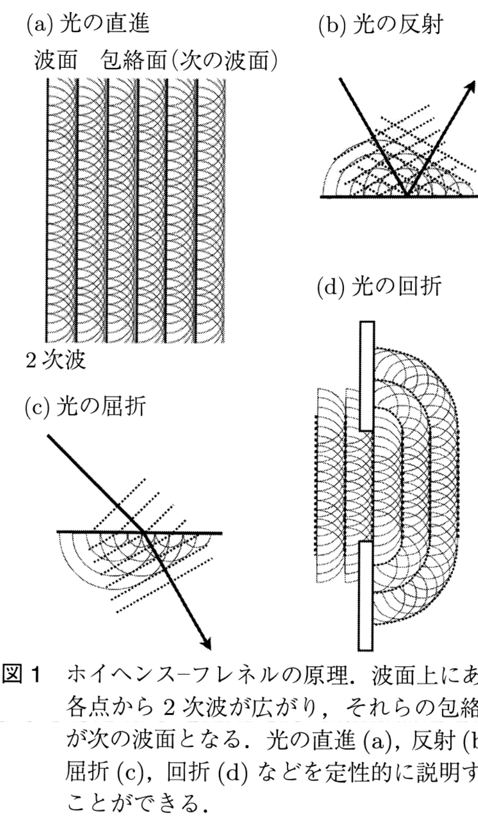


図1　ホイヘンス–フレネルの原理．波面上にある各点から2次波が広がり，それらの包絡面が次の波面となる．光の直進 (a)，反射 (b)，屈折 (c)，回折 (d) などを定性的に説明することができる．

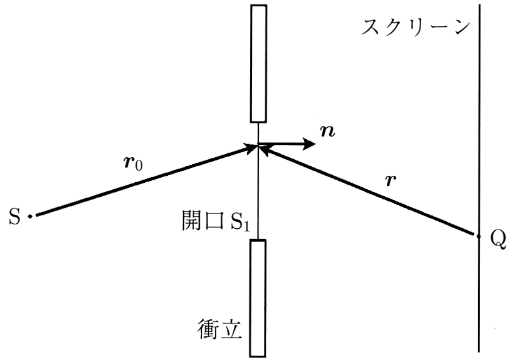


図 2　フレネル–キルヒホッフの回折積分．光源 S から出た光は開口を通った後，スクリーン上の点 Q に達する．この点 Q での電場強度を定量的に見積もるには，フレネル–キルヒホッフの回折積分を行う必要がある．

強度がどの程度になるかを定量的に見積もろうとすると大変なことになる（図 2）．式の詳しい導出法などは私自身も教科書[1)]の記述を鵜呑みにしているだけなので省略するが，ある適切な近似の下での結果は**フレネル–キルヒホッフの回折積分**と呼ばれる次式のようになる．

$$U(\mathrm{Q}) = \frac{iA}{2\lambda}\iint_{\mathrm{S}_1}\frac{\exp ik(r+r_0)}{rr_0} \times \{\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) - \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_0)\}\,\mathrm{d}s.$$

ここで，$U(\mathrm{Q})$ は点 Q における波動（例えば電場），A, λ は波源 S の振幅および波長，k は波数で $k = 2\pi/\lambda$, $\boldsymbol{n}$ は開口の法線方向単位ベクトル，$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角である．

この積分表式を「美しい」あるいは「エレガント」と感じるかどうかは人によってまちまちだろうが，私の個人的な経験からいうと，この手の積分はできるならばやりたくないという気持ちが強い．参考にした教科書にはいくつかの例が載っているので，興味のある方は是非挑戦してみていただきたい．私の気持ちも少しは理解していただけることと思う．まあ，原理は美しいのだが，現場はもっとおどろおどろしいといった典型例だろう．

さてそんなわけなので，ホイヘンス–フレネルの原理について私はこれ以上書くことはできない．以下ではもう少し分かりやすいフェルマーの原理について考えていこうと思う．

2. フェルマーの原理は正しくない？

実は光学の業界ではよく知られたことなのだが，フェルマーの原理を上記のような「光は所要時間（光路長）の最も短い道筋を進む」とするならば，これは厳密にいうと誤っている．例えば図 3 に描かれたような，点 A から点 C に置かれた反射鏡を通り点 B へ向かう光が通る道のり（光路長）を考えてみよう．反射鏡が平面鏡であれば，確かに光路長 ACB は最短である．ところが，反射鏡を点 A，B を 2 つの焦点とする楕円面鏡にすると，反射鏡のどの場所で光が反射しても A から B への光路長は同じになる．さらにその楕円面よりも大きな曲率をもつ凹面鏡に替えれば，光路長 ACB は最長となってしまう．

したがって，フェルマーの原理は「所要時間が最短となる」ではなく「所要時間が極値（停留値）となる」としなければならない．これを式で表現すると，

$$\delta\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\mathrm{d}t = \delta\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\frac{1}{v}\mathrm{d}s = 0,$$

あるいは屈折率を n としたときの物質中の光速度 v と真空中の光速度 c の関係 $v = c/n$ から

$$\delta\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} n\mathrm{d}s = 0$$

となり，何やら変分原理を彷彿させるものとなる．そう，実際これは 1830 年代にハミルトンが変分原理によりフェルマーの原理を定式化したものである．

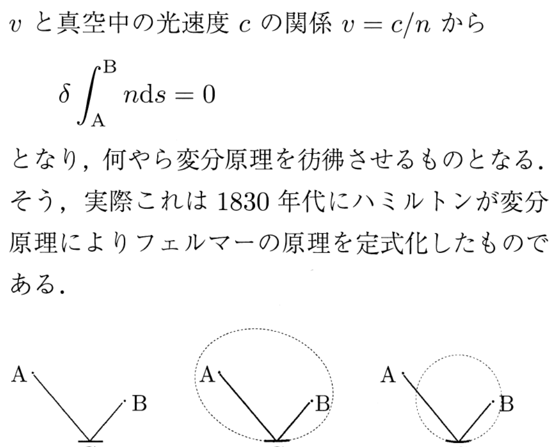


図 3　反射鏡による光路．点 A から放出された光が点 C で反射し点 B へと進む際，光路長が (a) 平面鏡のときは極小（最小）値，(b) 楕円面鏡のときは停留値，(c) さらに曲率の大きな凹面鏡のときは極大値をとるような道筋を光はたどる．

3. 極小値？ それとも極大値？

図 3 に示した例でフェルマーの原理の説明は十分かもしれないが，もう少し一般的にどのようなときに所要時間が極小値をとるのか，あるいは極大値になるのかを考えてみよう．ヒントは極小値と極大値との境目，すなわち図 3 (b) の反射面が楕円面の場合のところに隠されている．反射面が楕円面であれば，ある時刻に点 A から放出された光はどのような道筋をたどろうと必ず同じ時刻に点 B に到達する（もちろん直接点 B に達する道筋は考えてはいけない）．これはレンズを用いた光学系の結像条件と一致している．つまり図 3 (b) は図 4 と等価な配置と考えることができる．

図 3 (b) あるいは図 4 で，点 A に点光源を置くとその像が点 B に結ばれる．この条件を数式で表現してみよう．まず図 3 (b) のほうだが，上下を反転させて図 5 のように座標軸などをとり，幾何光学の手法で考えることにする．

点 $A(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ に置かれた点光源から出た光は球面状に広がり，点 $C(a\cos\theta, b\sin\theta)$ に達する．点 C における楕円の曲率半径 R は

$$R = \frac{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{3/2}}{ab}$$

で与えられ，この反射面は焦点距離 $f = R/2$ のレンズと同じ働きをする．ただここで注意しなければならないのは，入射光が光軸（反射面の法線方向）に対して ξ の角度で入射している点である．このような場合，紙面（メリジオナル面あるいは子午面と呼ばれる）内での焦点距離は $f_{\mathrm{M}} = (R/2)\cos\xi$ となり，直入射（$\xi = 0$）の場合に比べて短くなる．

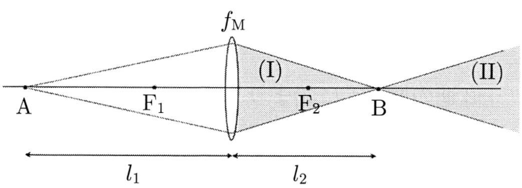


図 4　等価な結像光学系．図 3 (b) の楕円面鏡による反射はレンズによる結像光学系と等価である．また，図 3 (a) に対応するのは (I) の領域に，図 3 (c) に対応するのは (II) の領域に点 B がある場合である．

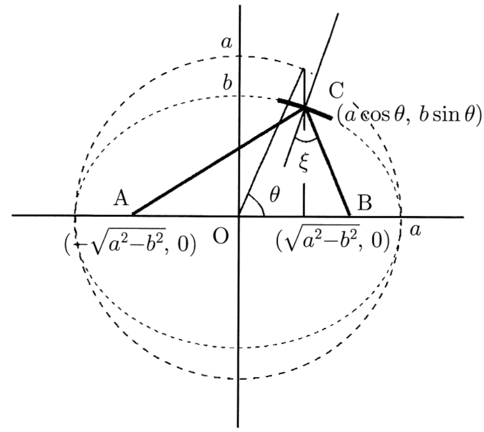


図 5　レンズの公式との関係．

そして点 C で反射された光は点 $B(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ に向かうことになる．簡単な計算から，

$$\overline{\mathrm{AC}} = l_1 = a + \sqrt{a^2-b^2}\cos\theta,$$
$$\overline{\mathrm{CB}} = l_2 = a - \sqrt{a^2-b^2}\cos\theta$$

が求まり，点 C での楕円の法線方向単位ベクトル

$$\boldsymbol{n} = \left(-\frac{b\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}, -\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}\right)$$

を利用すれば，$\cos\xi = b/\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$ であることがわかる．そしてこうして求めた l_1, l_2, f_{M} の間には，

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{f_{\mathrm{M}}}$$

なるレンズの公式，すなわち図 4 で満たされているのと同じ関係があることが確認できる．

このように，図 3 (b) と図 4 が等価であることが確認できたので，フェルマーの原理に戻り，どのようなときに光は所要時間が極小，極大となるような経路をたどるのかを見てみると，点 A の像点（図 4 では B と表示）よりも手前にあるような点（ハッチした領域 (I) 内の点）へは所要時間が極小になるような道筋を光はたどり，像点よりも遠い場所にある点（ハッチした領域 (II) 内の点）へは所要時間が極大となるような道筋を光はたど

ることになる．

4. より一般的な原理を求めて

フェルマーの原理について少し詳しく説明してきたが，前述したようにこの原理により幾何光学という学問体系の基礎が完成した．しかし幾何光学では光の回折という現象を説明することはできない．回折現象を説明するには少なくともスカラー波の波動光学が必要であり，その基礎となっているのがホイヘンス–フレネルの原理だ．

ところがスカラー波の波動光学では光のもつ偏光特性を説明することはできない．例えば誘電体表面での光の反射，透過（屈折）の偏光依存性*1)，全反射の際に起こる**グース–ヘンシェン変移**や**アンベール変移**などだ（図 6）．これらをきちんと説明するには，光を電磁場の振動，すなわち電磁波（ベクトル波）と考えねばならず，**マクスウェル方程式**を使う必要がある．そしてさらに，黒体輻射スペクトルを説明するには電磁場を量子化し，エネルギー量子（光子）という概念を導入しなければならない．すなわち**量子光学**の助けが必要となる．

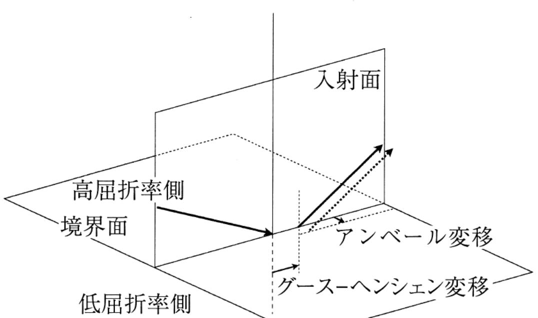


図 6　グース–ヘンシェン変移とアンベール変移．光が境界面で全反射する際，入射光が直線偏光の場合は入射面内に変移し（グース–ヘンシェン変移），円偏光（楕円偏光）の場合は入射面に垂直な方向にも変移（アンベール変移）する．これらは，低屈折率側に波長程度漏れ出すエバネッセント光の影響であり，マクスウェル方程式を適切な境界条件の下で解き，電磁波のもつエネルギーの流れ（ポインティングベクトル）を考えることで明快に説明できる．詳しくは参考文献 1) を参照のこと．

*1) フレネルは光が横波であることを初めて証明した（1827）．誘電体境界面での光の反射と透過（屈折）は，その偏光特性も含めてフレネルの公式でよく記述できる．

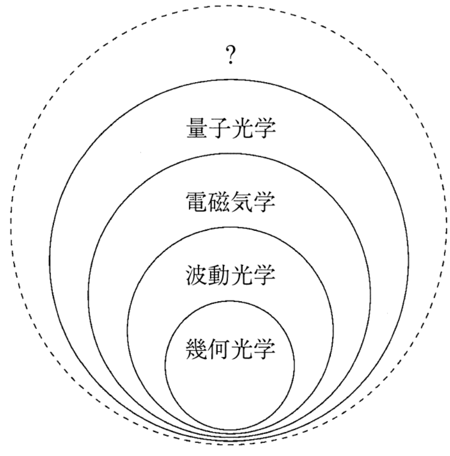


図 7　光を取り扱う学問の包含関係．

このように光を取り扱う学問は図 7 に示すような構造となっており，量子光学を使えばあらゆる光学現象は記述できる．したがって，光学の最も根元にある原理とは量子光学が拠り所とする原理，つまり本特集号の“電気力学から場の理論へ—ゲージ原理”と“量子力学の原理を求めて”を組み合わせたものであろう．読者の方々にはそれらの記事も参考にしていただきたい．

なお，今のところ量子光学でも説明がつかないような現象は見つかっていないが，「未来永劫そのようなものは現れない」と断言することはできない．それはこれまでの歴史が教えてくれるところだ．

5. 原理主義者と現場主義者

「直進の原理」に始まり，フェルマーの原理，ホイヘンス–フレネルの原理など，時代考証からしても拙稿で紹介した光学の原理が近代物理学の礎に大きく影響したことは間違いない．振り返ればガリレオ以来，自然科学は数多くの観測事実，実験結果をもとにしてその底流に潜む普遍的な法則，あるいは「美しい原理」を追い求めてきた．そして

現在に至りどうやら立場が逆転してしまった風でもある．そう，原理に基づいて様々な現象を記述する法則を説明し，ひいては現象を観ずとも自然界は理解できるという発想，いわゆる原理至上主義も垣間見えることがある．

ただ，ちょっと待ってほしい．確かに物理法則は原理から論理的に導くことができるが，その元となる原理についてはどうだろう．物理学において原理とは数学の世界の公理と同様なものであり，決して疑ってはいけないもののようだ．そうすると物理学は「自然界はこのような原理の下で動いている」といった中世の信仰の世界と何ら変わらないようにも思えてくる．そう，聖書を紐解くかわりに数式を駆使する宗教だ．そしてこれを認めるのであれば，原理は美しいに越したことはないし，エレガントなほうが良い．

近世，自然科学はいわゆる“科学的”な考え方により“非科学的”な宗教・哲学から分離したとも言われるが，その自然科学，特に物理学の根本と言われる原理自身が何らかの方法で正しいと論理的に証明されない以上，換言すれば，原理を盲目的に信じている限りは，自然科学も“非科学的”な宗教・哲学の一種と言わざるを得ない．かくいう私も「物理教」の信奉者ではあるが，決して原理主義者にはならないことを心がけている．やはり自然界の主役は自然そのものであり，そこで起こる現象には謙虚かつ真摯に向き合うのが第一と考えている．そして実験家，現場主義者としては，既存の原理では説明がつかない現象を見出す，あるいは産み出すことが至上の喜び，究極の目標である．

参考文献

1) 辻内順平,『光学概論 I, II』(朝倉書店) 1990 年.

（くが・たかひろ，東京大学大学院総合文化研究科）

宇宙論の諸原理

横山　順一

1. はじめに

宇宙論は，宇宙全体を対象としてその成り立ちを考究する学問であり，対象が茫洋としていること，そして基礎科学というよりは応用科学であることから，この特集が想定するような（基礎的諸）「原理」からは最も遠いものであることは，疑いない．これはしかし，科学としての宇宙論の話であって，古来幾多の文明がそれぞれ独自の宇宙観を持っていたように，宇宙論というのはまさに「思想」であり，きちんと体系化された思想はやはり原理から出発してきたものだったのである．宇宙論が科学になるには長い時間がかかったが，この大宇宙の前では人間の存在はあまりにも小さく，この深淵かつ神秘的な宇宙について考えようとするとき，襟を正し，まずは原理的な考察から始めてきたのもまた歴史的事実である．

宇宙を，地球や太陽といった構成要素によってではなく，もっと基礎的な立場から捉えようとしたのは，ニュートンあたりからであろう．彼の主著『自然哲学の数学的諸原理』において，ニュートンは，古典力学が前提とする「絶対時間」，「絶対空間」というものをさりげなく定義し，それらは「他のなにものにも関わりなく，一様に流れるもの」，「いかなる外的事物にも無関係に，常に同形，不動のものとして存続する」ものであると述べている．天体の運行する宇宙の容れ物としての時間と空間は，こうして絶対的な意味を与えられ，未来永劫変化しないものと考えられた．ニュートンの世界観に従えば，宇宙は永劫不変なのである．

そしてこの絶対時間と絶対空間の中に繰り広げられる（と多くの人が錯覚した）ニュートンの力学があまりにも偉大な成功を収めたため，これらに関して疑問を呈した人は少なかった．

これを厳しく批判的に再検討したのが，マッハであった．私たちは，ものの変化を直接時間に即して測ることはできない．むしろ逆に，時間とはものが変化するということから私たちが引き出した抽象なのである．したがって，どんな変化にも無関係な，「絶対時間」について私たちは云々することはできないし，またそれは「事実のみを研究する」というニュートンの姿勢にも反したものだった．その意味では，宇宙は永劫不変である，という考えは一つの原理として導入されたものであったと言えるだろう．

ニュートンはまた，有名なバケツの実験によって，回転するバケツの水の中心が凹むという事実が絶対空間の存在を示していると主張したが，これについてもマッハは，「ならば，止まったバケツの周りで宇宙全体が回転したとき，水が凹まないことを証明せよ」という厳しい要求で斥け，運動の相対性を主張する．そして，「あらゆる質量，あらゆる速度，したがってまた，あらゆる力は相対的なものなのだ.」という結論に至る．こうした考え方が，巡り巡ってアインシュタインの相対性理論に繋がっていったというのは，よく言われてい

るところである．

2. アインシュタインの宇宙・ハッブルの宇宙

こうして，ニュートンの力学や万有引力の法則は，前世紀の初めにアインシュタインの特殊および一般相対性理論によって塗り替えられることになったが，アインシュタインといえども，宇宙は永劫不変である，という宇宙観から抜け出すことはなかった．

彼は，宇宙全体を扱えるような重力理論である一般相対性理論を発明した直後に，これを宇宙の構造の解析に用いたが，この理論をそのまま適用したのでは定常宇宙が実現しないことがすぐにわかった．アインシュタイン方程式は，時空間の幾何学的構造と宇宙のエネルギー・運動量を重力定数を介して等値する，という形をしているので，宇宙はそのまま静かに放っておけば，万有引力を及ぼしあう星や銀河の質量によって，潰れてしまうのである．

そこでアインシュタインは，空間自体に対し斥力の働きをする宇宙項というものを自分の方程式に導入し，これを引力である重力と釣り合わせることによって，時間的に変化しない宇宙を実現させることにしたのである．つまり彼は自分の方程式を変更してまで「**宇宙永劫性原理**」に固執したわけである．もっともこの宇宙は極めて不安定で，わずかのズレを与えただけで，急激に膨張したり潰れてしまったりする代物であった．星や銀河の引力と宇宙項の斥力のどちらが大きくなっても，宇宙はそのズレを増進する方向に変化していくからである．

一方ロシアのフリードマンはアインシュタイン方程式を修正せずに解き，膨張宇宙の解があることを発見した．アインシュタインはこれを初め嫌ったようだが，しかし偏見は常に事実によってとって替わられる運命にあった．

宇宙がそれ自体進化していく存在である，ということを初めて観測的に明らかにしたのは，アメリカの天文学者，エドウィン・ハッブルで，1929

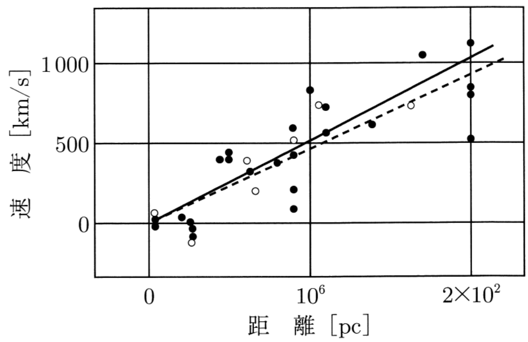


図 1　ハッブルの観測データと彼の引いた直線．

年のことであった．彼は，遠方の銀河が，地球からの距離に比例した速度で私たちから遠ざかっていることを見出した．図 1 は彼の用いた観測データを横軸に銀河の距離，縦軸にその後退速度をとってプロットしたものである．物事を批判的にしか見ない人であったら，これだけのデータからこの図に原点を通る直線を引き，距離と速度の正比例関係を主張することは決してできないことだが，このようなバラツキの多いデータからあえて簡潔な結論を引き出したところがハッブルの真に偉大な点であったと言える．

ハッブルの法則を解釈するのは簡単である．すべての銀河はかつて私たちの位置にあり，あるとき一斉に，蜘蛛の子を散らすように，いろんな初速度で私たちから遠ざかり始めたのである．それをある一定の長時間たった後に観測すると，同じ時間内では当然速度の大きい銀河ほど遠ざかっていることになる．したがって，私たちから見て遠い銀河ほど距離に比例した速度で遠ざかっていることが理解できる——というのは，いかにももっともらしい一方，はなはだ**居心地の悪い**解釈である．天動説をやめて地動説を採用して以来，私たちは人類のいる地球こそが宇宙の中心である，という傲慢な考えを捨て去ったにも関わらず，この説明は私たちが宇宙の中心を占めている，ということを要求するからである．

このようなことを要求しない，ハッブルの法則の解釈は，宇宙空間が一様に膨張している，という考えを採ることである．もし宇宙空間が一様に

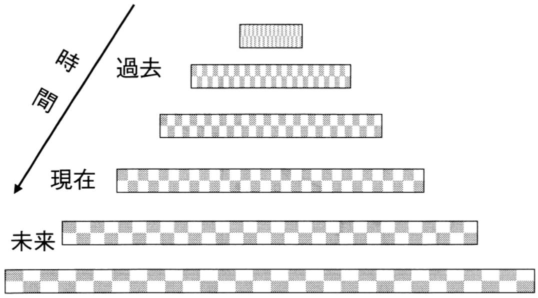


図 2　宇宙が一様に膨張していると考えると，各点から見てより遠方にある点は距離に比例した速度で遠ざかることがわかる．

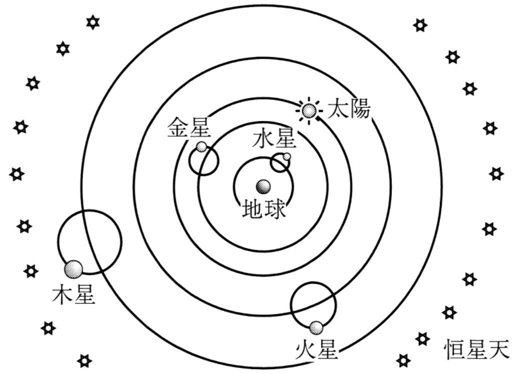


図 3　プトレマイオスの地球中心宇宙．

膨張していれば，2 倍の距離にある銀河までの空間は同じ時間に 2 倍広がるので，各銀河は**どこから見ても**観測者からの距離に比例した速度で一様に遠ざかっていくことになる（図 2）．このような解釈を取ることによって，膨張宇宙に基づく現代的宇宙進化史が花開いていくことになったのである．

3. 天動説と地動説

ハッブルの観測結果をどう解釈するか，その決め手となったのは，上述のように，神様の特別の恩寵を受けた（？）人間こそが宇宙の中心にいる，という原理を採るか，それとも人間は特別の存在ではないのだ，という考え方を採るか，すなわち，天動説を採るか，地動説を採るか，ということである．

惑星の運行に関して言えば，地動説だけが正しくて，天動説は間違いである，と一般には考えられている．しかし，例えばプトレマイオスの天動説（図 3）はうまくできていて，各惑星が地球の周りを円軌道を描いてぐるぐる回る，という単純なものではなく，各惑星の軌道は周天円と誘導円という 2 つの円軌道の重ね合わせによって記述されていたのである．そのおかげで，火星が見かけ上後戻りしたりするような運動もうまく記述できていたのである．すなわち，当時の観測精度の下では現象の記述という意味では十分な説明になっていたのである．実は，現在の精度でも地球を中心とした記述は可能である．各惑星の軌道を表す円の数を増やしていけばよいのである．すなわち軌道のフーリエ級数展開である．しかし，地動説のほうが遙かに単純で理解しやすいし，天動説に立っている限り，ニュートン力学にはいきつくことはできなかった（天動説では惑星間の距離を一意的に決めることができない），ということを考えると，やはり**地動説を採るべき**なのである．天動説から地動説へのコペルニクス的転換は，私たちに正しい原理に基づいて考察することの重要性を如実に物語っていると言えよう．

4. 宇宙原理

さて，アインシュタインに戻ろう．一般相対性理論のアインシュタイン方程式は，テンソルからなる非線形微分方程式であり，そのままでは解析的に解くことは，特殊な場合以外不可能である．そこで宇宙論を考えるときには，宇宙全体のある性質を反映した，何らかの簡単化が必要になる．このとき行うのが，「**宇宙原理**」を採用する，ということである．フリードマンの解もこれに基づいていた．

宇宙原理とは，宇宙にはへそも目玉もなく，どの点も本質的には同じであること，また特別な方向というのもなく，どちらを向いても同様であることを主張するものである．もちろん，宇宙原理を文字通りに受け取ったのでは，これが正しくないことは明らかである．早い話が，地球から見た宇宙と月から見た宇宙が同じであるはずがないか

らである．しかし，宇宙論的なスケール，すなわち今日的に言うと，銀河を数十個集めてできた銀河団やさらに銀河団を集めてできた超銀河団が何個も入るような大きなスケールではこれが成り立っていると見なしてもよいであろう，という半ば期待を込めてこれを採用するのである．

宇宙原理を導入した大きな動機は，これによってアインシュタイン方程式を簡単化し，解けるようにするということであったが，もう一つ見逃せないのはその思想的背景である．天動説をやめて地動説を採用して以来，私たちは人類のいる地球こそが宇宙の中心である，という傲慢な考えを捨て去った．宇宙原理はその自然な延長線上にあり，そもそも宇宙には中心などないのだ，と主張するもので，さしずめ「宇宙の民主主義」といったところである．

とはいえ観測的な裏付けがなければ，いかに立派な内容を持った原理であっても絵に描いたモチにすぎない．私が学生であった頃までは，宇宙原理に対する**定量的な**裏付けはあったとは言えず，恐る恐る採用していたような案配であったが，しかし幸いなことに，1993年に発表された宇宙背景放射探査機COBEの観測結果によって，宇宙を満たす電波放射が極めて等方的に分布していることがわかり，宇宙原理に対する強い支持が得られた．

宇宙原理に基づいてフリードマンやルメートルによって展開された膨張宇宙論は，宇宙は高温高密度の灼熱の状態から出発し，膨張とともに元素や天体を作りながら冷却して現在の状態に至った，というガモフのビッグバン宇宙論に発展した．これは，ハッブルの法則，ヘリウム等の軽元素の存在量，そして宇宙背景放射の存在，という3つの大きな観測事実を説明する，優れた理論であった．ここに，宇宙永劫性原理が正しくなかったことが確立したのである．

5. インフレーション宇宙論

ビッグバン宇宙論は優れた宇宙モデルであったが，その一方で，なぜ宇宙空間は大域的に一様・等方で，宇宙原理が成り立っているような状態にあるのか，宇宙の曲率半径が極めて大きく，宇宙は空間的に平坦に見えるのはなぜか，星や銀河の種となった小さな密度ゆらぎ（密度のムラ）の起源は何か，などの基本的な問題も抱えていた．これらの諸問題を一挙に解決したのがグースや佐藤勝彦，スタロビンスキーらを嚆矢とする**インフレーション宇宙論**である．

この理論は，初期宇宙に何らかのスカラー場のポテンシャルエネルギーが優勢になった状態を考え，それによって指数関数的な膨張を引き起こそう，というものである．宇宙膨張率はエネルギー密度の平方根に比例するが，通常の物質や放射のエネルギー密度は宇宙膨張によって減少してしまうため，宇宙膨張は徐々に減速する．一方，ポテンシャルエネルギー密度は，宇宙膨張とは無関係に，スカラー場の状態によって決まるので，状態が変わらなければエネルギー密度も変わらず，膨張率一定の指数関数的膨張が実現できるのである．これはいわば，宇宙全体が一定の位置エネルギーを持った状態にあるのと同じである．このような指数関数的膨張によって宇宙の非一様性は均され，また曲率半径も指数関数的に増大するため，宇宙原理が成り立つような大域的に一様・等方で，平坦な時空が実現する．

さらに，インフレーションを起こすスカラー場は量子場であるから，量子的な**ゆらぎ**を持つ．零点振動によって生じたミクロな量子ゆらぎが指数関数的膨張によって引き延ばされることによって，銀河や銀河団等の大域的構造の種が同時に提供されるのである．インフレーション宇宙論のこの予言は現代宇宙論のあらゆる観測と整合的である．

インフレーション宇宙論のさらに面白い点は，この量子ゆらぎの振幅は宇宙膨張率に比例するので，インフレーションの初期にさかのぼるほど一般に大きくなり，場の古典的な時間発展よりも量子ゆらぎがそのダイナミクスを支配していた時代があったという予言である．このような状態においては，宇宙は決定論的な時間発展をせず，**量子ゆらぎ**によってランダムな運動を続けながら永遠に

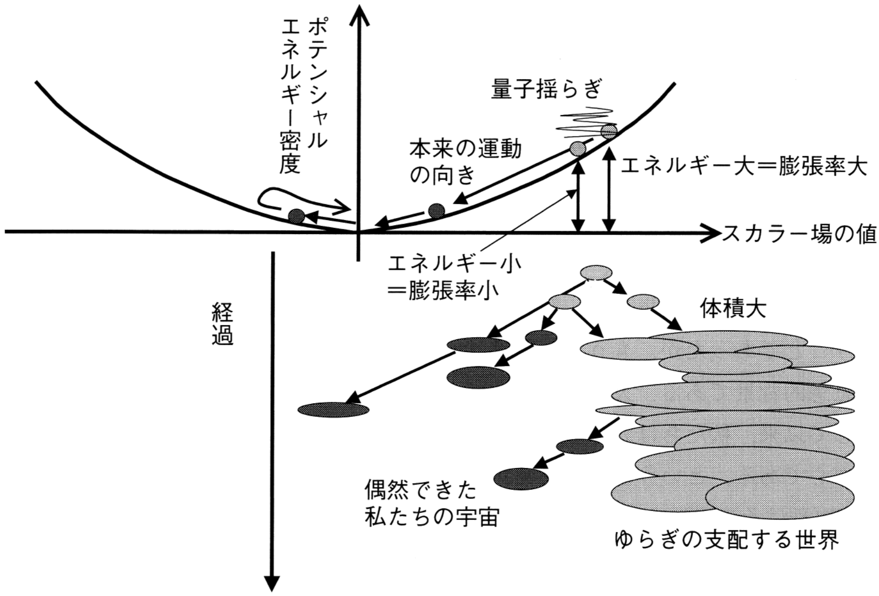


図 4　スカラー場のポテンシャルエネルギー密度と宇宙の進化.

インフレーションを続けることになる．すべてがゆらぎによって支配されているということは，時計のように規則的に動くものがない，ということであり，これはいわば時間のない世界である．私たちの宇宙は，このようなゆらぎによって支配された世界から偶然，膨張率もゆらぎも小さな世界に転移することによって生まれ，決定論的な発展が可能になったのである（図 4）.

こうした考え方に従えば，宇宙空間には私たちの領域以外にも，ゆらぎの支配する世界から解放され，時間発展できるようになった別の宇宙が多数存在することになる．このことは私たちの宇宙観に，ある意味で変革を求めていることになる．

太古の宇宙観では，人間のいる地球が宇宙の中心であった．天動説をやめて地動説を採用して以来，こうした考え方は葬り去られ，地球や人間というのは広い宇宙の中ではごくありふれた存在であると考えられるようになり，それが宇宙原理へと発展していったことは上に述べた通りである．「私たちの宇宙が普通の宇宙である」，という思想は，現代の宇宙論の研究にもしっかりと受け継がれてきている．もし，宇宙が初めから宇宙原理を満たすような非常に特殊な条件の下で生まれた，ということを素直に認める立場をとるのであれば，あえてインフレーションを導入し，その成り立ちを説明する必要などなかったはずである．私たちがそのような立場をとらず，インフレーション宇宙論へと進んでいったのは，そのような思想的背景があったからに他ならない．

しかし，皮肉にもインフレーション宇宙によると，私たちの宇宙は，永遠にインフレーションを続けるゆらぎに支配された世界に囲まれた，むしろ特殊な存在であることになる．しかも，私たちの宇宙以外にも様々な性質を持つ多数の宇宙が存在するというのである．このことは，人間の存在をさらに矮小化するものだと考えることもできるし，逆に，私たちの宇宙が生まれるためには，相互作用の分化の仕方などいろんな偶然が重なることが必要なので，私たちの宇宙，あるいはそこに生まれた人間こそは神の特別の恩寵を受けているのだと解釈することも不可能ではない．

このような宇宙観の問題はもはや物理学の範疇ではないが，それ以外に一つ困った問題が起きる．これまで私たちは，元素合成におけるヘリウムの量にせよ，その前提となる宇宙のバリオン数の値にせよ，これらはすべて宇宙の進化の中で決定論

的に生成してきたと考え，理論を構築してきた．しかし，インフレーションによっていろんな特徴をもった小宇宙が存在するとなると，このような決定論的な立場は，もはや完全にはとることができなくなってしまうのである．このことは，私たちの宇宙の創生を偶然の入り込む余地なく記述することは不可能であるということを意味し，宇宙論の研究に対して一つの限界を与えることになる．

6. 人間原理

このように，宇宙がたくさんあり，しかもそれぞれ異なる性質を持っていてもよい，ということになると，私たちの宇宙を違った立場から解釈しよう，という機運も生じてくる．このことは，もともと10次元の理論として定式化されたスーパーストリング理論においてはいっそう顕著になる．私たちの住む4次元時空を差し引いた残りの6次元空間をどのように隔絶するかによって，4次元世界の真空が多種多様な様相を帯びてくることになるからである．とりわけ先年提唱されたフラックスコンパクト化という方法で高次元に起因する自由度を固定すると，私たちの4次元世界にはなんと 10^{100} 通りとも 10^{1000} 通りとも言われるほど多数の状態が現れることになる．その一つ一つが，異なる物理定数を持ち，異なる物質の存在する宇宙に対応することになるのである．このように多数の状態の中で，なぜ私たちが住んでいるような状態が選ばれたのか，ということに関しては，「**人間原理**」という考え方がある．

人間原理とは，自然はそれを観測できる人間が存在し得るようにできている，という考え方である．例えば，もし私たちの宇宙が大きな真空のエネルギーを持っていたとすると，真空のエネルギーはインフレーションを引き起こすポテンシャルエネルギーと同じ性質を持つので，銀河ができる前に宇宙は再びインフレーション的膨張期に入ってしまい，その後の銀河形成は不可能になり，人間が生存できるような環境ができないことになる．しかし私たちの宇宙には人間が住んでいるから，その真空のエネルギーは小さいことが結論づけられる．これは論理学的には対偶命題に置き換えているということであり，本命題と対偶命題の真偽は一致するから，論理的には間違ったことをしているわけではない．

しかしながら人間原理には重大な問題がある．もう少しわかりやすい類例で言うと，「なぜ私たちの宇宙は4次元か？」という質問に対し，人間原理は，「さもないと惑星の軌道が閉じないから」とか，「より高次元だと原子が安定に存在できないから」というような説明を与えてくれる．この説明は論理的には全く正しいが，「いかにして余剰次元がコンパクト化したか？（あるいは，しているように見えるか？）」という問題に対して，何らの示唆も与えてくれないのである．つまり，人間原理をいかに弄んだところで，フラックスコンパクト化という理論に行き着くことはできないのである．この例からわかるように，人間原理の与える解答は，物理学者が探求している解答とは性質を異にするものであり，これが理論物理学の進歩に貢献するものではないことは明白であると言えよう．

現代宇宙論を悩ます最大の問題に，ダークエネルギー問題がある．私たちの住む宇宙は，自然なスケールであるプランク密度（10^{93}g/cm^3）より120桁も小さな真空のエネルギーを持っている．プランク密度程度を与える場の理論における量子補正がなぜうまく制御され，しかもこれだけ小さな値が残ったのか，その真の正体は何なのか，というのがダークエネルギー問題である．上述のように，真空のエネルギーが大きすぎると，私たちは生まれることができないので，人間原理によってこれを理解しよう，という人も多い．しかし，余剰次元のコンパクト化の例からも明らかなように，真空のエネルギーの値をコントロールする物理的機構が発見されるまでは，人間原理によってその数値が説明できたと考えてはならない．

（よこやま・じゅんいち，
東京大学ビッグバン宇宙国際研究センター）

電気力学から場の理論へ
ゲージ原理



細 谷　裕

1. 物理とは何か

物理は何をどのように明らかにするのだろうか．自然現象を記述するだけでは物理とならない．同じ一つの考え方で，すべての自然現象を説明する．状況が与えられれば，結果を定量的に予言する．

物理は，誰でもどこでもいつでも使える．このことを物理は普遍的であると言う．さらに経験上わかっているのは，物理が単純明解であるということだ．簡単なことから複雑な現象を説明する．それは物理の醍醐味だ．目の前の世界だけでなく，未知の世界さえもが明らかになる．

物理には出発点がある．出発点を基本法則と言う．基本法則の探求と，基本法則から自然現象を説明すること，そして帰結する更なる法則を導き，より複雑な現象を記述説明する．

物理の基本法則は決してランダムにあるのではない．よくよく見ると，そこには基本法則が満たすもの，満たすべき指導原理がある．これを物理の**原理**と言う．

物質の最小構成要素が，お互いにどのように力を及ぼし合うかを探求するのが素粒子物理学である．この素粒子物理学を支配する原理として，相対性原理，作用原理，ゲージ原理がある．ここでは，この**ゲージ原理**に迫ろう．

2. 電場と磁場

マクスウェル理論によれば，空間のすべての場所に電場 $\boldsymbol{E}$，磁場 $\boldsymbol{B}$ が存在し，荷電粒子は電場，磁場を生成し，その電場，磁場が空間を伝播し，別の荷電粒子がそれを感じて力が伝わる．荷電粒子の運動はローレンツ方程式

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right\} \tag{1}$$

で記述される．右辺は，電場と磁場が電荷 e の粒子に及ぼす力を表す．

電場，磁場の時間変化はマクスウェル方程式

$$\begin{cases} \operatorname{div}\boldsymbol{E} = \rho, \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{B} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \dfrac{\boldsymbol{j}}{c}, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

で記述される．左側の第1の組の右辺に現れる $\rho, \boldsymbol{j}$ は粒子の電荷密度，電流密度である．方程式 (1) と (2) がセットになって粒子と電磁場の時間変化が完全に決まる．電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ は物理的な実体であり，空間の各点に存在する．電荷粒子がなくても（$\rho = \boldsymbol{j} = 0$），マクスウェル方程式 (2) から電磁場が波となって伝播することが帰結される．実際，この電磁波は観測され，マクスウェル理論の正しさが確立された．

3. 作用原理

古典論で，粒子の運動と電磁場の時間変化を記述するには方程式 (1), (2) で十分である．方程式 (1), (2) を基本法則と呼んでも差し支えない．しかし，ここで一歩進めて，基本法則をより簡潔な形にまとめることを試みる．

19 世紀の数理物理学の発展で，物理の運動方程式は作用原理により導かれることが知られていた．つまり，方程式 (1), (2) も作用（action）と呼ばれる量が，力学変数を少し変えても変化しない，つまり，作用が停留値をとる，という要請から帰結されるはずなのである．

では，何が力学変数なのか．電磁場を記述する力学変数は電場 $\boldsymbol{E}$，磁場 $\boldsymbol{B}$ であろうか．この問いに対する答えは意外な展開を引き起こす．方程式 (1), (2) を作用原理から導こうとすると，電磁場をベクトル・ポテンシャル A^{μ} ($\mu = 0 \sim 3$) で表す必要があるのだ．天下り的だが，4 次元的な表記 $x^{\mu} = (x^0 = ct, \boldsymbol{x})$, $\partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu}$ で電磁場は

$$\begin{aligned} &F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \ , \\ &F_{0k} = E_k \ , \quad F_{jk} = \epsilon_{jkl} B_l \end{aligned} \tag{3}$$

と表される（$j, k, l = 1 \sim 3$）．相対論的な作用は

$$\begin{aligned} I = &-mc \int ds + \frac{e}{c} \int dx^{\mu} A_{\mu} \\ &- \int d^4 x \, \frac{1}{4c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{4}$$

となる．この作用が荷電粒子の座標 $x^j(t)$ の変分に対し停留値をとると要請すればローレンツ方程式 (1) が導かれ，電磁場のベクトル・ポテンシャル A^{μ} に対する作用の停留性からマクスウェル方程式 (2) の第 1 の組が導かれる．第 2 の組は $F_{\mu\nu}$ の定義 (3) から帰結される．

ここで注目すべき点は，(a) ベクトル・ポテンシャル A^{μ} を力学変数として変分をとらなければ作用原理からマクスウェル方程式が導き出されないこと，(b) 作用 (4) に A^{μ} があらわに現れること，である．運動方程式には現れない A^{μ} は，本当に必要だろうか．

4. 相対性原理

運動方程式や作用を書き下すにあたり絶対に守られねばならない原理がある．冒頭で「物理は，誰でもどこでもいつでも使える」と述べた．この一見当り前と思える要請は，物理の根底を支える**相対性原理**として定式化される．

誰でも使えるとは，物理の基本法則は観測者，実験をする人によらないということだ．どこでも使えるとは，単に隣町だけでなく，地球の裏側，地球の内部，月の上，太陽の中，遠い銀河のはて，宇宙空間の真ん中でも同じ物理法則が成り立つことを意味する．そして，いつでも使えるとは，100 年前でも 100 年後でも，あるいは地球が生まれたときでも，宇宙の大爆発があった 137 億年ほど前でも，現在知られている物理の基本法則がそのまま適用できるということだ．

これはまた，我々が時空のどこに位置するか，どのように動いているかは本質的なことではなく，すべての観測者が同等であることを意味する．つまり，物理，あるいは，自然科学に関する限り，すべての観測者は相対的であり，特別なものは何もない．これを相対性原理と言う．

物理では，相対性原理は座標系 $x^{\mu} = (ct, \boldsymbol{x})$ を使って表現される．物理の基本法則は，どの座標系でも同じである．例えば，運動方程式 (1), (2) はどの座標系でも同じ形をとる．作用 (4) は座標変換に対して不変である．

相対性原理は，ガリレイ，ニュートンにより定式化された．物理法則は静止している系でも，それに対して等速度で動いている系でも同じである．これに付随する座標変換はガリレイ変換と呼ばれる．20 世紀初頭，光速度が座標系の取り方によらないことは，他のことから説明できることではなく，原理の一部であることをアインシュタインは見抜いた．相対性原理を維持する上で，ガリレイ，ニュートンの理論から変更されるべきは，座標変換の仕方である．新しい変換はローレンツ変換と呼ばれ，こうしてできたのが特殊相対性理論である．作用 (4) はローレンツ変換に対して不変である．

アインシュタインは，さらに，重力が時空のひずみに帰着することをつきとめ，一般相対性理論をつくりあげた．ここにいたり，すべての座標系は完全に同等になる．

相対性原理なくして物理はない．

5. ゲージ不変性からゲージ原理へ

荷電粒子と電磁場の基本方程式 (1), (2) と作用 (4) に戻ろう．作用原理の形に基本法則をまとめようとしたとたん，ベクトル・ポテンシャル A^μ を力学変数と見なさねばならないことを認識した．しかし，運動方程式には A^μ は現れない．電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ で運動が決まる．これはどういうことか．

ここには，驚くべき対称性，不変性が秘めている．方程式も作用も変換

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x) \quad (5)$$

に対して不変なのだ．ここで，$\Lambda(x)$ は時空点に依存する任意の関数である．実際，$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$ で運動方程式は変わらないし，作用 (4) の第 2 項でも $\int dx^\mu \, \partial_\mu \Lambda$ は線積分の上限と下限での値の差で表され，運動方程式，物理に影響を与えない．この変換 (5) は古典論におけるゲージ変換と呼ばれる．運動方程式が不変なので，理論はゲージ不変である．

ここまでだと，理論のゲージ不変性は単に便宜上，出現したもののように思えるかもしれない．もう一歩進めて次のように考えてみる．この不変性は偶然現れたものではなく，背後に何か深い理由があるのではないか．理論のゲージ不変性は，実は絶対に守られねばならないのではないか．つまり，物理の原理の一つなのではないか．

ゲージ不変性も原理として要求する．運動方程式はゲージ不変であり，作用は運動方程式に影響を与えない表面項を除いてゲージ不変である．これをゲージ原理と言う．

相対性原理とゲージ原理を組み合わせると，相互作用の仕方さえもがかなり決まってしまう．電磁相互作用では，相互作用が局所的であることも要求すると，荷電粒子と電磁場の相互作用を記述する作用は (4) 以外にはあり得ないことになる．言い換えると，原理が相互作用まで決めてしまう．これはすごい．

6. 量子力学

ゲージ変換 (5) から明らかなように，ゲージ原理はベクトル・ポテンシャル A_μ を基本的な力学変数と考えることを前提とする．それでも疑問は残る．A_μ は本当に必要だろうか．電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ で話を済ませることはできないか．量子力学はこの問いに最終的な答えを与える．

ミクロな世界を記述する量子力学では，電子の状態はシュレーディンガーの波動関数 $\psi(t, \boldsymbol{x})$ で表される．電子も波であり，時空の各点で，波動関数 $\psi(t, \boldsymbol{x})$ は複素数の値をとる．電磁場中の状態変化はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m} \Big(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\boldsymbol{A} \Big)^2 + eA^0 \right\} \psi \quad (6)$$

で記述される．この方程式はベクトル・ポテンシャル A_μ なしでは書けない．この方程式は，(5) のゲージ変換で

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\left\{ i \frac{e}{\hbar c} \Lambda(x) \right\} \psi(x) \quad (7)$$

とすれば不変となる．逆に言うと，ゲージ原理は，(6) を要求し，電子の電磁場への相互作用の仕方を決める．

電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ だけが現れる古典論における電子の運動方程式 (1) と違って，量子論ではベクトル・ポテンシャル A_μ を使わなければ基本方程式 (6) を書けない．

シュレーディンガーの波動関数 $\psi(t, \boldsymbol{x})$ は，電磁場と同じく時空の各点で値をもつ「場」である．一般に，電荷をもつ物質を場で記述するには，ベクトル・ポテンシャル A_μ が不可欠となる．

さらに，量子論においては，電磁場の効果は電場と磁場だけでは記述しきれないことが，シュレーディンガー方程式 (6) から帰結される．これはアハロノフ・ボーム効果と呼ばれる．ベクトル・ポテンシャルは，電場と磁場だけでは表しきれない

物理的自由度を持っているのだ．

例えば，磁束 Φ を持ったソレノイドの周りを電子が運動する状況を考えよう．ソレノイドの外側では電磁場はなく，電子はソレノイドの内側には入れないとしよう．古典論のローレンツ方程式 (1) によれば，ソレノイドの外側では $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}=0$ なので電子はソレノイドの内部の磁束の影響を受けない．

ところが，量子論では電子はシュレーディンガー方程式 (6) に従い，ベクトル・ポテンシャル A_μ の中を運動する．ソレノイドの外側でも A_μ は零ではなく，電子は磁束 Φ の影響を受ける．

量子論で電磁場を記述するには電場，磁場だけでは不十分で，ベクトル・ポテンシャルが必要となる．ゲージ理論では，ゲージ場の基本力学変数は A_μ である．

■ 7. ゲージ理論の一般化 ■

このように電子，あるいは，もっと一般に，荷電粒子の電磁相互作用は電磁場のベクトル・ポテンシャルで記述され，ゲージ原理により相互作用の形が決まってくる．1960 年以降の素粒子物理学の発展は，このゲージ原理が，強い相互作用，弱い相互作用をも支配していることを明らかにした．

まず，ゲージ理論がマクスウェルの電磁相互作用だけでなく，多様な形をもつことを見てみよう．電磁相互作用におけるゲージ変換 (5) と (7) を

$$
\begin{aligned}
A'_\mu &= A_\mu - \frac{i\hbar c}{e}\,\Omega\partial_\mu\Omega^{-1},\\
\psi' &= \Omega\psi, \qquad\qquad (8)\\
\Omega(x) &= \exp\left\{i\frac{e}{\hbar c}\Lambda(x)\right\}\in U(1)
\end{aligned}
$$

の形に書き直してみる．$\Omega(x)$ は $U(1)$ 群の元である．$\Lambda(x)$ の代わりに，$\Omega(x)$ で言い表せば電磁相互作用は $U(1)$ ゲージ不変な理論であり，それを記述するには $U(1)$ ゲージ場のベクトル・ポテンシャル $A_\mu(x)$ が必要となる．電磁相互作用は $U(1)$ ゲージ理論で記述される．

ここで，$\Omega(x)$ が時空点 x に依存してもよいことが重要である．時空の各点で $U(1)$ の向きが違っていてもよいのである．電子のような物質場 ψ に対する微分は必ず共変微分

$$
D_\mu\psi = \left(\partial_\mu + i\frac{e}{\hbar c}A_\mu\right)\psi \qquad (9)
$$

の組合せで現れる．ゲージ変換の下で，この共変微分は $(D_\mu\psi)' = \Omega D_\mu\psi$ のように変換する．

ここまでくると，$\Omega(x)$ を別の群の元に置き換える可能性が見えてくる．例えば，$U(1)$ の代わりに $SU(2)$ や $SU(3)$ を考えよう．もちろんそのためには，物質場 $\psi(x)$ が 2 成分の $SU(2)$2 重項，あるいは，3 成分の $SU(3)$3 重項であると考える．同時に $SU(2)$（$SU(3)$）ゲージ不変性を維持するには，それに対応して $SU(2)$（$SU(3)$）ゲージ場を導入する必要がある．この $SU(2)$ 群へのゲージ場の拡張は，1954 年，ヤン（Yang）とミルズ（Mills）によってなされ，この理論はヤン・ミルズ理論，あるいは，非可換ゲージ理論と呼ばれる[1)]．内山はさらに一般化し，重力をもゲージ理論として定式化しようと試みた[2)]．

具体的に $SU(3)$ ゲージ理論がどのようにつくられるか示そう．電磁相互作用のベクトル・ポテンシャルに対応して，$SU(3)$ の場合は 3 行 3 列のエルミート行列の形をしたベクトル・ポテンシャルを導入する．

$$
A_\mu(x) = \sum_{a=1}^{8} A_\mu^a(x)T^a\ , \quad \mathrm{Tr}\,A_\mu = 0. \quad (10)
$$

ここでエルミート行列 $\{T^a\}$ は $SU(3)$ 群の生成子で $3^2-1=8$ 個あり，$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$ の関係式を満たす．f^{abc} は $SU(3)$ 群を特徴づける構造定数と呼ばれる．3 成分からなる 3 重項の物質場 $\psi(x)$ があると，$SU(3)$ ゲージ変換の下で $A_\mu(x)$ と $\psi(x)$ は

$$
\begin{aligned}
A'_\mu &= \Omega A_\mu\Omega^{-1} - \frac{i\hbar c}{g}\,\Omega\partial_\mu\Omega^{-1},\\
\psi' &= \Omega\psi, \qquad\qquad (11)\\
\Omega(x) &\in SU(3)
\end{aligned}
$$

のように変換する．$U(1)$ の場合の (9) との類似

性に着目したい．$SU(3)$ の場合は Ω も A_μ も行列で，$\Omega A_\mu \Omega^{-1} \neq A_\mu$ である．A_μ の変換性は，$\psi(x)$ に対する共変微分が (9) と同じ形で与えられ，それがゲージ変換の下で

$$D_\mu \psi = \Big(\partial_\mu + i\frac{g}{\hbar c}A_\mu\Big)\psi, \qquad (D_\mu\psi)' = \Omega D_\mu \psi \tag{12}$$

となるべしとの要請から決まる．

さらに，電磁場 (3) に対応する場の強さも行列となる．

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i\frac{g}{\hbar c}[A_\mu, A_\nu] \\ &= \sum_{a=1}^{8} F^a_{\mu\nu} T^a \ , \\ F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + \frac{g}{\hbar c} f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \ . \end{aligned} \tag{13}$$

電磁場の場合と違って，ゲージ変換の下で場の強さは

$$F'_{\mu\nu} = \Omega F_{\mu\nu} \Omega^{-1} \tag{14}$$

のように変換し，ゲージ不変なゲージ場の作用は

$$I = -\int d^4x \frac{1}{2c} \mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{15}$$

で与えられる．ここまでくると，任意の群への拡張は明らかであろう．f^{abc} を考えている群の構造定数に置き換えればよい．

■ 8. 自然はゲージ理論を選ぶ ■

強い相互作用は $SU(3)$ ゲージ理論で記述される．$SU(3)$ の自由度はカラーと呼ばれる．陽子，中性子を構成するクォークはカラーを持つ $SU(3)$3 重項で，カラー・ゲージ場（グルーオン）を媒介にして強い相互作用をする．この理論は量子色力学（QCD）と呼ばれる．

弱い相互作用も電磁相互作用と一緒に統合することによって $SU(2) \times U(1)$ ゲージ理論，電弱統合理論で記述される．現在知られている素粒子の基本相互作用は，重力を除いて，すべてゲージ理論で記述される．

このことを我々は次のように言う．自然は $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ゲージ原理で支配されている．強い相互作用，電磁相互作用，弱い相互作用はその反映である．

■ 9. 驚くべきヤン・ミルズ理論 ■

どうして，自然はゲージ原理を重んじるのか．明白な答えはないが，ゲージ理論はそれを信じさせる特別な性質を持っている．

まずヤン・ミルズ理論の場の強さ (13) は A_μ について 2 次の項を含み，そのため作用 (15) は，A_μ について 3 次，4 次の項を含むことがわかる．これは，ヤン・ミルズ理論ではゲージ場自身が**ヤン・ミルズ電荷**をもち，自己相互作用があることを意味する．

量子論の世界で，ゲージ理論の特殊性がさらに顕著になる．上で述べたヤン・ミルズ理論の自己相互作用の結果，エネルギーが大きい領域，あるいは，短い距離ではゲージ相互作用が小さくなり，低エネルギーで長い距離になるとゲージ相互作用が大きくなることが判明する．この性質は漸近的自由性と呼ばれ，QCD で記述される強い相互作用が高エネルギーでは相互作用が小さくなって摂動論で精度よく記述される．その裏返しとして，低エネルギーの世界ではクォークの閉じ込め現象が起こり，クォークは単独では取り出せず，陽子，中性子などハドロンのみが観測される．

それだけではない．スカラー場がスピン 0 の粒子を記述するのに対し，ベクトル場はスピン 1 の粒子を記述する．電磁相互作用と弱い相互作用を統一する $SU(2) \times U(1)$ 電弱統合理論では，W ボゾン，Z ボゾンというスピン 1 の粒子が現れる．これらの粒子は，南部による対称性の自発的破れにより陽子の 100 倍近い質量を持つことになる．ここで驚嘆に値するのは，これらスピン 1 の粒子は，ゲージ理論を使わねば矛盾なく記述することが不可能であるということだ．

もう少し説明しよう．スピン 1 の粒子の散乱をゲージ不変性を持たないベクトル場の理論で記述

しようとすると，量子論的に確率が保存しなくなる．2粒子の散乱の断面積がエネルギーとともにどんどん大きくなって，確率の総和が1より大きくなってしまう．さらに，相対論的に不変な理論では，負の確率を持った仮想粒子が出現してしまうことにもなる．確率の総和はいつでも1であるというユニタリティはゲージ理論でのみ維持できる．

また，量子論では，古典論にはない量子補正が生じる．これを単純に計算すると無限大になって発散する．ところがうまいことに，ゲージ理論ではこの発散は見かけであって，真の観測量ですべてを書き直してみると，すべてが有限になっており，量子補正を実験で検証することができる．この有限性を保証する性質は繰り込み可能性と呼ばれる．スピン1の粒子を記述する理論で繰り込み可能な理論はゲージ理論だけである．

■ 10. ゲージ原理の勝利 ■

自然界にはスピン1の粒子が存在し，電磁相互作用も，強い相互作用も，弱い相互作用もすべてがゲージ理論で記述される．ゲージ理論を使わなければ，整合性のある理論が作れない．実験でも $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ ゲージ理論が高い精度で確かめられている．まさに，自然はヤン・ミルズ理論を選んだのだ．

これらの事実をもって，自然界の基本法則はゲージ原理に支配されているといっても過言ではないだろう．どのゲージ群が選ばれるか，またどのような物質場が存在するかはまだ完全には解き明かされていないが．

■ 11. ゲージ原理を超える ■

現在の素粒子物理学を支配する原理として，相対性原理，作用原理，ゲージ原理がある．このうち，相対性原理は別格であり，相対性原理なしの物理はあり得ない．では，作用原理，ゲージ原理はどうであろうか．

作用原理とゲージ原理は別の形のものに置き換えられても不思議ではない．なぜ，作用原理とゲージ原理がこのようにうまく自然を記述するのかはわからないが，物質の基本構成要素が別の形で理解できるなら，これらの原理が原理ではなく，他の原理からの帰結として理解され得るであろう．

実際，この道筋で新しい考え方を提供しているのが超弦理論である．弦理論では物質の最小構成要素は点粒子ではなく，ひも状の広がりを持ったものと考える．理論的整合性をつきつめていくと，この弦理論は超対称性を備え，時空は4次元どころか10次元であると結論される．さらに，この10次元の中に広がる膜状のDブレーンが存在し，我々が認識する4次元時空になっていると推測される．

このシナリオでは，N 枚のDブレーンが重なると $U(N)$ ゲージ理論が生まれる．つまり，最初にゲージ理論ありきではなく，ゲージ理論はDブレーンの力学により生成されることになる．ゲージ原理はもはや原理ではなく，単にDブレーン力学の結果なのだ．

超弦理論は今のところ未完成である．超弦やDブレーンの運動を記述する第1原理がわかっていないし，運動方程式そのものも部分的にしかわかっていない．まだまだ，大きな要素が欠落している．

まずは，自然現象との接点を見極め，超弦理論を完成させることが必要であろう．その暁にはゲージ原理を包括する新しい原理が見つかるであろう．

参考文献

1) C.N. Yang and R. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191.
2) R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101** (1956) 1597.

（ほそたに・ゆたか，大阪大学大学院理学研究科）

原理と法則を行きつ戻りつ…

青山 秀明

1. 来訪

ある冬の日の午後，知り合いの学生三人組が私の研究室に遊びにやってきた．彼らは皆一回生．私（青）の「力学」の講義に出ている理学部の緑谷君（緑）と彼の映画製作サークル仲間の赤川さん（赤），黄海君（黄）である．彼らとはこれまで折に触れて，科学や学問のあり方ついて実に様々なことを語り合ってきた．

2. 原理から法則へ

青：やあやあ，いらっしゃい．外は寒かっただろう．今，熱いエスプレッソを入れるよ．

緑：先生，いつもすみません．先日の「Corruption—京大の黄昏」の撮影には御協力ありがとうございました．先生の悪役は実に似合っていて….

赤：ストップ，ストップ．今日はこの前の議論について話に来たんでしょ．

黄：僕も赤川さんも文系で，いつも緑谷には「科学的見方が重要だ」と説教されています．それで彼の薦める雑誌「数理科学」の12月号というので，物理の原理の話を読んでみたんですよ．

青：ほう，それは感心だ．で？

赤：色々な原理については何となく分かるんですが，でも『法則』っていうのもありますよね．

緑：そうそう，先生の力学の講義で言えば「エネルギー保存の法則」とかが出てきました．

黄：ですから，僕たちの間では何が原理で何が法則か，そもそも原理と法則の違いは何か，なんて議論になりました．

青：おいおい，それはまた難しい問題を吹っかけてきたな．あまりそのようなことに構っていても変な袋小路に入り込んでしまうよ．でも一度は整理しておくのもよいかも知れない．

青：そもそも，原理は物理の一番の根本・出発点にあると言ってよいだろう．そこを土台にして物理の理論が構築される．法則は原理から導き出されていて，最終的な物理現象についての結果への一里塚だ．

緑：そう言えば，先生は講義で『力学』の本[1]を高く掲げて「私が紙とペンだけ持って無人島に流れ着いても，Newtonの運動方程式から出発して，ここにあることは全て導き出せる」とカッコつけてますよね．

赤：それって…（絶句）．

青：おいおい，聞こえが悪いよ．私はちゃんと「私は記憶力がとても悪いが，そんなことができるのは，多くの法則が基本原理から如何に導かれるかが分かっているからだ．大事なのは原理から法則への道筋・考え方であって，それを身につけることがこの講義の主題だ」って説明しているよ．

黄：僕の物理のイメージというと，たくさんの法則や公式を覚え，それらをうまく組み合わせて問題を解くっていう風なんですが．

青：そうだね，そういう誤解はよく聞くよ．確かに，実際の現象を理解したり，起こるべき結果について計算して予言をするには，一々，原理まで戻っていては大変だ．だから，原理から出発して，比較的一般性のある結果までをあらかじめ導いて，それを法則として確立しておくことは有用だよ．

緑：「エネルギー保存の法則」はまさにそうですね．

青：その通り．法則の集まりを身につけておけば原理から出発するよりずっと早く答えに辿り着く．その意味では法則の集合は物理的世界観，パラダイムを構成するとも言える….

赤：何か先生の目が遠いところに飛んじゃってますが，

そこまで行くと専門家の柏木先生[2]に任せたほうが無難ではないでしょうか．

青：（ふと我に返り）あ，いやいや．つい性分で，理論的な構成の話ばかりをしてしまった．おっと，エスプレッソができているのをつい忘れていたね．

3. 法則から原理へ

私と3人の学生はそれぞれデミタスカップを手に一息入れ，話の続きを始めた．

青：ここで実験や観測について話しておこう．

緑：実験は面白いですね．大好きです．

青：それは感心感心．これまでは「原理から法則を導く」という話をしてきたが，一方で，実験や観測の結果をよく見て，法則を発見したり確認するという所が肝心だ．時間順序で言うと，むしろ，法則が先に見つかり，そこから原理へと掘り下げることで物理の世界が完成する．例えば，太陽系の惑星の運動でKeplerの法則が見つかり，それがNewton力学を生むといったようにね．

赤：それはつまり，原理より法則のほうが現実世界に距離的に近いからですね．

黄：なるほど！ 赤川さん，鋭い！

青：うん，うまいまとめ方だ．実際，物理屋は現象を調べて見つかった法則を「現象論的」法則と呼ぶけど，経済学なぞでは「経験事実」(empirical facts) と呼んだりする．

黄：あ，僕にはその言葉には馴染みがあります．

青：科学的な真実の求め方は普遍的で，様々な所で活躍するからね．事実や実際の現象を無視して，思い込みで理論を作ったのでは真実は分からない．私はそれを「『例え話』[3]の暴走」と呼んでいるよ．

赤：厳しい言葉ですね．

青：経済でも社会でも言語でも，今は実に多種多様な精密データが揃っている．それらは物理の実験や観測の結果と同じようなもので，そこに何か美しい法則が埋まっていて，それらを見つけるとそこから奥底にある原理へと扉が開かれる….

黄：今度は夢見るような目つきだ！

青：あはは．でも実際，データは物理屋には宝の宝庫に見えるのは事実だ．そんな所から「経済物理学」っている新分野[4]もできている．

緑：僕は理系のせいか，その魅力はよく分かります．

黄：じゃあ，そこでの新発見にはどんなことがあるのでしょうか？

青：現象論的には，企業の財務の様々な分布や変動法則には実に見事に成立して美しいものがあることが分かってきている．それらの奥に潜む原理については面白い仮説もあり，研究が盛り上がっているところだ．

黄：まさに研究の最前線ですね．

青：それと，一つ付け加えると，原理にこだわって法則を侮るのはいけない．正しく法則を確立して，それによって現実世界の姿をしっかり把握することは，それだけでもすごく有意義なことだんだよ．経済や社会の現象については特にそう言える．

赤：先生は先ほど「言語」と言われましたね．興味あります．

青：それは，英語の単語長数列の構造についてなんだけど，「乱分割原理」というのを見つけたよ．他にもいくつかの発見があるけど，そんな具合で，研究の様々な最前線では法則と原理の間を行ったり来たり….おっと，もう外も暗くなってきた．冬の日は本当に短いね．記事のコピー[5,6]をあげるから，次回，君たちの考えを聞かせてくれると嬉しいよ．今日はこれまでにしよう．

三人（口々に）：　分かりました．エスプレッソ，ごちそうさまでした．今度はケーキでも持ってきます．今日はどうもありがとうございました．

—全員退場

参考文献

1) 青山秀明著，『力学』(学術図書出版社，2009年)．
2) 冨田恭彦著，『科学哲学者 柏木達彦の多忙な夏—科学ってホントはすっごくソフトなんだ，の巻』(ナカニシヤ出版，1997年) 他．
3) 吉川洋著，「経済学にとって数学とは」「週刊東洋経済」2006.9.30号9頁．
4) 青山秀明，家富洋，池田裕一，相馬亘，藤原義久著，『パレート・ファームズ—企業の興亡とつながりの科学』(日本経済評論社，2007年)；『経済物理学—Econophysics』(共立出版，2009年)．
5) 青山秀明著，「言語物理学の夜明け」「パリティ」(丸善，2003年12月号)．
6) 青山秀明，家富洋著「国立大学は競争にさらされているか？」「科学」(岩波書店，Vol.**77**, No.12, Dec. 2007)．

（あおやま・ひであき，京都大学大学院理学研究科）

物理の創造と原理の役割

米谷　民明（聞き手：編集部）

1. 物理における“原理”の重要性

――今回のテーマである“原理”は，物理では様々な分野に現れますが，総体してそれがいかに重要であるか，物理における意義についてお聞かせせいただけますでしょうか．

原理というと，日常の言葉では“原理・原則”とか，いろいろな行動をするときの“指針”や“根拠”といった意味になると思いますが，物理でも基本的にはそういう使い方をしていて，法則というよりは“前提とすべき考え方の指針”といった意味があると思います．それにはいろいろな使い方のレベルがあって，例えばディラックの量子力学の教科書には，『Principles of Quantum Mechanics』というものがありますね．この場合の原理（Principle）は“ある分野の要点をまとめ上げる”という意味で使われている例になりますが，他にはアルキメデスの原理など近代科学以前の時代に，自然現象を考えるときに原理という言葉を使うという例もありますよね．大体は，一般の原理というと，光速度不変の原理もそうですが，永久機関が不可能であるという原理など，個別の法則というよりも原則的な意味合いが強いと思います．



米谷民明氏．

また，時代によっても使い方が変わると思います．その時代の知識の程度や法則に関する理解の深度によってずいぶん変わってきます．昔は，本当はその根拠がよくわからないけれども，そういうものを仮定したらよく説明できる，という意味での“原理”だったものが，今ではもっと基本的な法則から導けるという“原理”もありますね．例えば，フェルマーの原理は，光が通る道は通過時間が最短の経路をとる，というものですが，最初はその背後の物理法則から導いたというよりも，何かそう考えるのが自然であり，実際にそれで光の伝わり方が理解できる，というものだったと思います．それが今では，光と物質の相互作用から導いて，場合によってはそれが正しいかどうかも確かめなくてはなりません．ですので，原理と言っ

ても厳密には成り立たないものもありますし，法則とどう違うかといった話とも関係してきます．法則から導かれなければならないものもありますし，逆に光速度不変の原理などのように物理法則を考えるときの大前提としての経験原理と言うべきものもあるわけです．

いずれにしても，原理というものが物理学において大切な役割を果たしていることは確かですが，その意味づけをどう理解するかというのは，時代背景や場合場合に応じて違いますので，初学者にとっては混乱しやすいところだと思います．

――数学に出てくる定理や定義のように，明確な区別がないのですね．

そうですね．あくまでも経験法則ですし，経験を説明するものだから，必ずすべての法則，すべての原理には限界があり得るわけです．どこまで適用できるかということは常に意識しておく必要があります．数学の公理のように，そこから論理的な構造を組み立てる，というのとはちょっと違うわけです．例えば，数学に出てくる変分原理というのは，いわば方法論として使っている意味が強いですよね．いろいろな分野の違った現象に適用できるから，そういう意味で“原理”と呼んでいるわけですね．その辺りが，物理に出てくるアルキメデスの原理やパスカルの原理などとはちょっと意味合いが違うということですね．

ですので，それぞれの意味は違うけれども，広くいろいろな所に使えるというときに“原理”という言葉は使われる傾向があると，そう理解してよいと思います．どんな分野でも，日常生活でもそうですし，あまり厳密に区別する必要はないのだけれど，普遍的に物事を考えたり，根拠のはっきりしないときにまずそこを仮定してみるなど，そういった所に使われる言葉ではないでしょうか．

2. 物理の発展と“原理”の発見
――創造における関係性

――アインシュタインの光速度不変の原理やハイゼンベルクの不確定性原理など，新しい物理が生まれるとき“原理”というものが必ず関係していますが，そう考えると，物理の創造と原理の発見は互いに不可欠なものと言えるでしょうか．

それもいろいろな場合があると思うんですね．アインシュタインは光速度不変の原理というものを最初に仮定して，そこから特殊相対性理論をつくりましたが，ハイゼンベルクはむしろ行列力学ができて，シュレーディンガー方程式が出てきて，それらをどうやって調和させて解釈したらよいか，という考え方として不確定性原理を提案しました．最初に原理を仮定してそこから新しいものが生まれるか，何か新しい枠組みが生まれてから考え方が解釈として付いてくるか，それは場合によって変わってきますが，その理論が基本的なものであればあるほど，ある種の原理のようなものが必ず出てきます．

例えば，ストリング理論では実は原理がよくわかっていない，と言われます．それは，このハイゼンベルクの例に近いんですね．先に数学的にも物理的にも素晴らしい構造が見えているのだけれど，それの背景や解釈がよくわかっていないわけです．こうした例は，そのときの時代時代によって違いますし，考えている新しい法則の生まれ方の経緯や性格，時期によって違ってくると思いますが，新しいものが生まれるときには必ず何らかの形でそれに伴った新しい原理的な考え方が出てくるということは言えると思います．

アインシュタインのように，原理を先に考えて，そこから物事をつくっていこうという例は歴史的にしょっちゅうあったことではなくて，むしろ新しいものができたときにどう解釈するかという考え方を原理と呼ぶようになった例のほうが，物理の場合多いように思いますね．大昔はまた違うと

思いますが，ニュートン以後の物理学の発展はほとんどがそうだと思います．そういった意味では，アインシュタインのような例はうまくいった典型ですが，こういう例は希有なことです．一般相対性理論ができて90年以上も経つのに，今でも新たな精密な実験によってその正しさがますます確かめられてきています．物理で原理というものを重視するのは，そういう成功例があるからでしょうね．しかし一方で，量子重力などもっと先の話になってくると一般相対性理論にも限界が明らかになってきているわけですから，理論の発展段階によって役割が違ってくるのは避けられないのです．

――アインシュタインが成功した例は，物理に対する美意識とも関係していると思うのですが….

そうでしょうね．アインシュタインの晩年の自伝には，特殊相対性理論をつくるまでに考えたことや悩んだことが書いてあるのですが，そこにはっきり書かれていることは，当時の混乱した物理学の状況から抜け出すには基本原理のようなものを拠り所にしなければいけない，と意識的に考えていたんですね．もちろんそういうことができたのは時代背景もあるし，彼が天才だったからですが，いつでも原理・原則からすべてできるわけではないし，そればかりに偏りすぎて硬直化してしまうのもよくないと思います．自然科学というのは経験科学ですから，そのあたりのバランスが難しいところです．

――よく経路積分の解説の中で，フェルマーの原理やその不思議さが引き合いに出されますが，こういったことは歴史的な発展や創造した人たちとの関係を知ることで学んでいくものなのでしょうか．

経路積分は量子力学の原理ですが，最小作用の原理は量子力学の古典的極限で自然に導かれます．そう見ていくと，先ほどのフェルマーの原理の話もそうですが，古典物理よりももっと深い内容が量子力学に表れていることがわかってくるわけです．そういうことを突き詰めて見ていくと，例えば重ね合わせの原理にその根源があったことがわかったりするわけです．

よく経路積分というのは，歴史的にもっと早い段階で出てきても良かったのではないかと言われることがあるのですが，もしそれが出てきていたら逆に量子力学の発展は遅くなっただろうとも言われるんです．例えば，経路積分で水素原子を解くことは難しいですよね．調和振動子程度だとできますが….こういうことはシュレーディンガー方程式があったからできたわけで，パウリは行列力学で水素原子も解いてしまいましたが，経路積分が先にできてしまっていたらなかなかできなかったと思います．経路積分は直観的に理解するには非常にいいものですが，こう見ていくと物理の発展の仕方は実に興味深いです．

また1940年頃の話ですが，湯川先生は場の量子論の困難に直面して「マルの理論」と呼ばれる考え方について強調していたそうですが，朝永先生はその影響もあり，超多時間理論をつくりました．湯川先生は基本的で原理的なことを考えていたのですが，朝永先生はもう少しプラクティカルなことを考えて，大成功したのです．長い目でみるとどちらがよいとは言えませんが，湯川先生の考え方は後で弦理論などにも通じているわけですから，それぞれの人の性格やそのときの背景によって役割も違ってくるのだと思います．

3. 新たな“原理”を求めて

――現時点での物理の前線で，新しく注目されそうな，もしくは注目されている“原理”がありましたらお聞かせ頂けますでしょうか．

統一理論の考え方の基礎になるような原理を見つけたいと私は思っていますが….例えば，最近のストリング理論で注目されているゲージ重力対応では，ホログラフィック原理というものが考え方の基本になっていますが，これは原子核や物性などにも盛んに応用されはじめています．

これは，次元の低いところで高次元のものを表

せる，という対応原理で，ここ10年ほどの弦理論の発展の中で指針のような役割も果たしています．

理論が基本的になればなるほど，根本原理から定式化したいという欲求が出てくると思いますが，自然科学を研究する上ではやはり，そういうものにも限界があるということも意識していなくてはいけないと思います．

しかし，一方では新しいものを探すときには何か指針のようなものがないと混乱してしまいますから，そういうものを見つけることができれば研究を進展させるきっかけになると思います．

4. 学生の反応——教育現場での問題点

——今回の特集でも，記事として取り上げていますが，“原理”と“法則”の違いは，習い始めの学生や初学者には分かりにくい所ではないかと思いますが，それ以外のことも含めて，実際の教育現場でのお話をお聞かせいただけますでしょうか．

そうですね．原理と法則は，性格がそれぞれ違うということもそうですが，中身を十分に理解できていないと学生は混乱しやすいですよね．一般的には，原理は普遍的に適用できる場合を言いますが，法則はきちんとした体系から導こうとするときに言う場合が多いですよね．例えば，エネルギー保存といえば熱力学の第一法則をさしますが，実はそれは永久機関ができないということの元の法則なわけです．しかし，永久機関ができないということを原理として考える時期が，歴史的には18–19世紀にはあったわけですね．そういう歴史的背景も含めて，その辺の違いを混乱しないように中身をよく理解して，使い方を会得していくことが大切です．

実際の教育現場でも，高校を出たばかりで初めて大学で物理を学ぶには考え方の根本から組み立て直すのが必要になるのですが，それまで学んできたことをつなげて理解することが，なかなか頭の中でしっくりしていないような印象を受けます．例えば，ニュートンの法則から出発して様々な分野のことを理解しようとするのですが，高校ではニュートンの法則も習うけれど，本来はそこから導けるようなこともあたかも独立してあるかのような理解になっているわけです．それらのつながりがわかってくると，理解が深まってきて，法則と原理がどう違って，どう関係しているのかがだんだん掴めてくるのだと思います．初学者には難しいところではあるのですが，その辺りをどこまで意識しているかが，その人の理解度をはかる目安になるかもしれませんね．

例えば，エネルギー保存の法則とオームの法則というのは全然格が違うわけです．エネルギー保存の法則は非常に基本的な力学の法則で，オームの法則というのは経験的にほぼ正しいというようなものです．原理とも言えないし，法則と言うとむしろ語弊があるわけですね．本当は，物質の中で電子がどういう運動をするかということを，どういう場合に成り立つか吟味しなければならないわけですね．そういったことは，理解がある程度深まってくることで見えてくるのだと思います．

5. 美しい“原理”

——先生が好きな（もしくは美しいと思う）“原理”は何でしょうか．

学生時代に一番面白いなと思ったのは，最小作用の原理で力学などが定式化できるということでしょうか．これがわかったときは，素晴らしい，深い意味があるのだなと思いましたね．新しい考え方というものを原理という形で，その役割を徐々に理解できてきたときは感動しました．とくに理論物理を勉強する人にとっては，この最小作用の原理は，勉強を始めた頃に非常にインパクトのある，印象強く残っているものだと思います．確かファインマンもそういうことを言っていました．『ファインマン物理学』の電磁気学（英語版の第2巻）を読んだときに，最小作用の原理が出てきて，

それを初めて読んだときの印象はよく覚えています．学び始めたときの感動というのは，いい意味でそれ以降の研究の動機づけになると思います．

ただ最近の現場で感じることは，こういうことに学生が無感覚になってしまっているようにも思えますね．例えば量子力学の授業でも，それが古典力学からどういう形で飛躍があって発展してきたかというよりも，量子力学のルールをもっと教えてほしいという人がいます．私が学生のときは，できるだけ原点にかえって学びたいと思っていましたので，むしろ大変古い有名な本を選んで勉強することが多かったです．そういうことが伝わる学生も多くいますが，一方でこういう物理の思考過程のようなものを理解することのおもしろさがわからず，なかなかそういうことを受け入れる態勢になっていない人もいるんですね．すべての思考過程を追体験していくことは非常に難しいですし，非効率的ですが，ある程度のルールを学びながら，その中で歴史的な起源や考え方の根源を学んでいくことは大事だと思います．日本の大学の講義では，残念ながらルールを学んでいくことに重点が置かれてきたという背景がありますね．工学などの応用方面にいくにしても，できるだけ思考過程のようなものを学んでいく必要があるのではないかと思っています．

――本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

(2009年5月，東京大学駒場キャンパス研究室にて)

（よねや・たみあき，東京大学大学院総合文化研究科）



アインシュタインの反乱と量子コンピュータ

佐藤文隆著，B6 判，336 頁，本体 1800 円，京都大学学術出版会

あとがきに著者は次のように概嘆している．「たぶん 1970 年代が境だと思うが，“理論物理” という呼称は死語と化した．19 世紀末から 1950 年代まで続いた理論物理精神は消滅したと言えよう．おそらく 1953 年に開催された「国際理論物理学会」が国際的にも，その名にふさわしい最後の国際学会だったと言われている」専門の分化が進み理論物理と言ったのではそれが何を指すのか曖昧になったからである．このような状況下で，著者は「現在の学術の世界では互いに引き離されている諸テーマを歴史に戻って絡めていくこと，そしてサイエンスの “メタ” が縦横に語られる豊かな科学界が，日本でも生まれることを夢見ている.」と語っている．著書の言葉をそのまま借りれば，「放談型」，「テーマ発散型」で，マッハの時代から現代の量子コンピュータの時代まで，主にアインシュタインの関わりに注目しながら，量子力学の発展をその当時の政治的な環境，世相を交えながら語っていく．

著者は一般相対論の大家であるが，その物理学全般にわたる知識の広さ，関心の強さには驚かされる．そうでなければとても諸テーマ間の問題を関連付けてこの著書のように論ずることは不可能であろう．しかし，諸テーマ個々の説明はごく簡単なので，読むほうにも予め相当の知識と，「昔考えたことがある」といった強い興味を持っていることが要求されよう．こう書いている筆者の知識は浅く，とてもこのような著書の書評を受け持つ資格はないことを自覚しているが….実際，この著書で「初めて知った」事柄が多い．一方で，ところどころに著者自身の量子力学論，解析力学観などがちりばめられていて，「なるほど」とうなづける箇所がある．しかし，上述の夢の実現のために著者が読者として期待しているのは，研究者の中でも物理学全般に対する論客であろう．例えば，著者独自のものと思われるが，最近の「量子情報」の分野と物理的な「量子物質」の世界の “上下関係” に関しての議論など，いかにも激論の火種となりそうである．

さて，表題には工夫が見られる．アインシュタインは量子力学の発展の大いなる貢献者でありながら，後には量子力学そのものに否定的になって 3 人の著者による有名な EPR（Einstein，Podolsky，Rosen）と呼ばれる論文を書いた．これを反乱と呼んでいる．さらに論文以外の場所での量子力学に対するアインシュタインの批判を，筆者は初めてこの本で知った．実は EPR 論文で量子力学の欠陥として指摘されたテーマは，現在では矛盾ではないと決着がついているが，この反乱論文こそが，量子力学の不思議を炙り出し，さらに現代の量子コンピュータの研究の発端ともなっているのである．著者は，21 世紀では「テレポーテーションのアインシュタイン」と呼ばれてもよいと指摘している．事実，EPR 論文は今日，驚異的な引用数で知られている．

量子力学の進展をこのように，アインシュタインに関わる視点から見るというのも，斬新な感じを与えている．当然，アインシュタインにする記述が多くを占めるが，300 ページを超えるこの著書では登場人物も多い．登場人物からも内容が想像されよう；マッハ，ボルツマン，エクスナー，プランク，オストワルド，ボーア，ボルン，シュレーディンガー，ハイゼンベルグ，アインシュタイン，湯川秀樹，ホイーラー，ボーム，エヴェレ，ベル，などなど．

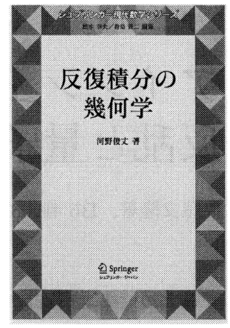
アインシュタインはプリンストンに移ってからは孤独であった．研究態度が一人仕事であったことにもよるが，オッペンハイマーによればアインシュタインは 2 つの誤りを犯した．一つは，連続性と因果性を捨てることができなかったので量子力学は受け入れ難かったこと．もう一つの誤りは，統一理論の完成に研究を集中したが，それは電磁場と重力場の古典的な力の場のみあって，当時大きな関心事であった強い相互作用，弱い相互作用などの量子論的な力の統一は枠の外であったことである．このオッペンハイマーのアインシュタイン評や，さらに湯川秀樹のアインシュタインに関する印象などは感銘深い．

末尾に「光子によるヤング干渉の誤解を正す」という節で，2 重スリットの問題を古典的な波としてではなく，第 2 量子化された光子による取扱いをするとどのようになるかについて議論がされている．

福田　礼次郎（慶應義塾大学理工学部）

反復積分の幾何学

河野俊丈著，A5 判，304 頁，本体 4900 円，シュプリンガー・ジャパン



多様体の位相的な不変量で基本的かつ代表的なものとして多様体のコホモロジーと呼ばれる加群がある．これは多様体の位相的な性質から定まる加群であるが，実係数で考えたときには，有名なド・ラムの定理により，微分形式とその外微分から定義されるド・ラム・コホモロジーと一致する．微分形式とは積分の式 $\int_a^b f(x)dx$ において $f(x)dx$ と書かれる，“積分される”部分を多様体の上で考えたもので，多重積分に対しても“$f(x_1,\ldots,x_n)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$”なる“向き”を考慮に入れたものの実一次結合として定義される．ここで k は微分形式の次数と呼ばれる．

多様体の位相的な不変量にはコホモロジーでは捉えきれないものもあり，その代表格が多様体の基本群である．多様体 X とその上の一点 x_0 が与えられたとき，点 x_0 を基点とする多様体 X の基本群とは $\pi_1(X,x_0)$ とは x_0 を起点，終点とする X の道のホモトピー類の集合で，合成に関して群をなす．ここで，2 つの道が同じホモトピー類に属することは一方が他方連続的に変形されること，として定義される．上記のような道全体のなす集合は自然に位相空間となり，ループ空間と呼ばれる．このとき基本群はループ空間の連結成分の集合と見なせるが，これが単位元のみからなるとき，すなわちループ空間が連結であるとき，X は単連結であると言われる．

多様体 X の微分形式の空間 $A^*(X)$ には外微分 d と，外積による乗法が定義されているが，それらを用いてループ空間上の微分形式を計算する手法が本書の主題となっている反復積分の方法である．反復積分によってループ空間上の微分形式が得られ，それを用いて基本群の冪単完備化や X が単連結である場合のループ空間の実コホモロジーが計算される．この構成法はバー構成法と呼ばれ，一般の微分次数代数に対して適用される．これらは，同時期に別の観点から Sullivan により始められ，微分次数環の極小モデルの理論とともに発展してきた．本書の後半でその応用が述べられているが，重要な例として Drinfeld associator の構成がある．これらは結び目の普遍量子不変量の構成にはなくてはならないもので，近年その重要性が増しつつある．また本書でも挙げられているように，双曲幾何において体積の計算に現れる多重対数関数も反復積分を用いて定義される．多重対数関数と L 関数の特殊値との関連も近年指摘されている．序文にもあるように，反復積分に関するまとまった本があまりなかったことを考えると，この方面における第一人者である著者による待望の一冊と言えよう．

まず 1 章，2 章はこの本の主となる対象である反復積分の定義から始まり，ループ空間上の微分形式としての反復積分，およびその外微分が導入される．そのあと 3 章，4 章，5 章でループ空間の位相空間としてのコホモロジーとバー複体の関係について述べられる．3 章，4 章は単連結のときに成立する，ループ空間のコホモロジーとバー複体のコホモロジーの間の同型が主題である．特に 4 章ではホモロジー接続を用いた具体的な計算法が述べられている．5 章では単連結でない場合を扱い，バー複体のコホモロジーから基本群の冪単完備化を計算する方法が述べられている．6 章，7 章ではそれまでの一般論を応用した，最近のトピックスを取り上げている．6 章では点の配置空間の基本群として現れる組み紐群の冪単完備化や，結び目の不変量について述べられており，著者が大きな貢献をなした分野である．最後は双曲幾何などの体積に現れる反復積分を用いて定義される多重対数関数などの特殊関数でしめくくられている．

上のように内容をざっと述べただけでも，かなりの内容が凝縮していると言えよう．1 章，2 章，3 章のおりおりに微分多様体の基本用語や本書で必要欠くべからざる，スペクトル系列に関する事項がまとめられており，初学者への配慮もされているが，3 章の中頃あたりから位相空間とホモロジーに関する標準的議論にはある程度なれていることが要求されているように思われる．しかし，この本に挙げられているような位相空間論の基本的な参考書と併読することも可能ではないかと思われる．

寺杣 友秀（東京大学大学院数理科学研究科）

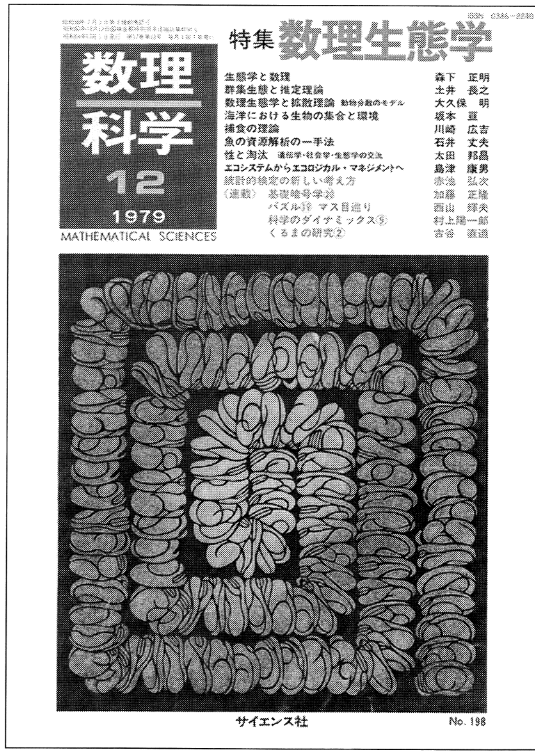
「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

坂本　亘

1979年12月号

海洋生物の研究は，遊泳力のない浮遊生物や食料の対象となる生物の数理解析から，海洋生態系の総合理解へと変遷している．安定同位体による生物圏食物網，小型生物装着・挿入機器や水中鳴音解析システムによる魚類，爬虫類，鳥類，哺乳類の回遊・移動経路，採餌，生息環境，体内情報（心拍，体温，胃酸，羽ばたき，鳴音）の研究が注目され，後者の最新情報は http://bre.soc.i.kyoto-u.ac.jp/bls/ で発信されている．魚類については沿岸域に生息する種はもとより，大規模に長期間移動するサケやマグロについても，回遊経路や日々の摂餌行動がわかり，解析の基礎となったランダム歩行モデルも行動と結びついてきた．中部ベーリング海から根室に母川回帰するシロザケの行動を見ると，推定距離 2760 km を 67 日で移動し，回収した記録計から 42 日間で 2500 km の遊泳距離が得られた．回帰開始から個体は母川に向かってほぼ直線的に移動していたことが窺える．それより南方を回遊するクロマグロは，台湾南方の産卵場周辺で孵化し稚魚期を日本列島周辺で過ごす．中には餌場をもとめてカリフォルニア沖へ，北緯 35～45 度亜熱帯・亜寒帯前線域を約 6 カ月で移動するものもある．成長後逆コースをたどり産卵場に戻る．日本の砂浜で生まれ，カリフォルニア沖の餌場で成長したアカウミガメも，産卵のためこの前線域を日本に向け 1 年間で移動する．彼らはランダムに経路を変えるのではなく，時計回りと反時計回りの渦を乗り換えながら，東西を移動する．この前線域は，大規模回遊生物のアジアとアメリカを結ぶ回廊のようだ．関心は生物の索餌場・産卵場など特定水域への定位法に集まり，地磁気，太陽，海流，溶存物等との関係が研究されている．日々の索餌・摂餌行動についても知見が得られた．前述のシロザケでは，日出・没に上下移動を繰り返し，水温躍層を中心に夜間講集する生物群を捕食している．同じ行動はクロマグロにも見られ，昼夜や季節的水温分布により変わる餌生物の種と密度に対応して，索餌深度と潜水頻度が変わるため，ランダム歩行モデルとは若干異なる解釈が示される．捕食する種と量は生態系を考える上で重要な要因であり，この分野についても進展が見られる．例えば，ウミウは摂餌後の体重増加に伴う揚力を得るため，飛翔時の羽ばたき頻度を増す．摂餌前後の羽ばたき頻度から摂餌量の推定が可能となった．哺乳類のジュゴンについては海草群落に設置したハイドロフォンにより，個体間の情報交換，出現時間と摂餌回数などが解明された．これらは研究者の個別情報だが，成果を共有することにより，海洋生態系への理解が深まるであろう．



（さかもと・わたる，近畿大学水産研究所）

問題例で深める物理 Problem Answer Discussion 第11回

流体力学からカオスへ

香取 眞理・中野 徹

流体力学は長い歴史を持ち，研究するものがもはやないという人がいるぐらいである．流体力学で現れる式の大部分は**非線形**であり，線形的取扱いにしか眼中にない人にとっては，流体力学には易しくてなおかつ意味のある線形問題はないということであろう．しかし近年の**コンピュータの発達**は，非線形方程式の数値解を可能とし，数値解は解析的な解の発見に役立つ．**ソリトン**の研究はそのような経緯をたどった．ローレンツによる対流での**カオス現象**の発見はカオスという分野の誕生のきっかけとなった．**フラクタル**も乱流で現れる．このように流体力学から多くの新分野が誕生した．コンピュータの利便性は，流体研究がますます身近になってきて，また新しい分野が見つかる期待を抱かせる．

流体は多数の分子からなっており，おのおのはランダムな熱運動をしているが，個々の分子の運動が見えないスケールで眺めると，**粗視化**された流体要素が滑らかに運動している．そのような要素を**流体粒子**と呼ぶが，流体粒子の密度場 $\rho(\boldsymbol{x})$，速度場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ を調べるのが流体力学である．今回は，流体力学で現れる基本的な方程式を**保存則**の観点から導き，簡単な問題を解いてみる．

11.1 質量保存則

流体中にある仮想的な体積をとると，その中の流体の質量の増減はその体積の表面を通じての流体の流出入と関係付けられる．

> **問題 11.1** 流体における質量保存則
> $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0$$
> を導きなさい．

解答 体積が V の中の流体の質量 M の時間的な変動を考える．流体の密度を $\rho(\boldsymbol{x})$ とすると，

$$M = \int_V \rho(\boldsymbol{x}) dV \qquad (11.1)$$

であるが，M が減少するとすればそこから流体が流れ出たためである．

V を囲む表面 S を通って単位時間に流れ出る流体の質量は，速度場を $\boldsymbol{u}$ とすれば，

$$\int_S \rho u da \cos\theta = \int_S \rho \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{a}$$

である．ここで $d\boldsymbol{a}$ は S 上の微小な面積要素ベクトルであり，θ は $\boldsymbol{u}$ と $d\boldsymbol{a}$ のなす角である．ガウスの定理を用いれば表面積分が体積積分

$$\int_S \rho \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_V \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) dV$$

になる．

M の時間変化は単位時間当たりの流入量であるから，次の式が得られる：

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\int_V \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) dV.$$

これに (11.1) を代入すれば，

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) dV = 0$$

である．$V \to 0$ の極限をとれば,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0 \qquad (11.2)$$

が導かれ，これを**質量保存則**と呼ぶ．■

(11.2) は電磁気学での電荷の保存式と同じである．発散をベクトル成分で書き表すと,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0.$$

以後は簡単のために，同じ添え字（上の場合は j）が 2 度現れるとそれに関して和をとるという**アインシュタインの記法**により，和の記号を省略して,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \qquad (11.3)$$

と表すことにする．

流体の速度がそこでの音速より十分に小さければ，ρ は時空間で変化しないので，$\rho =$ 一定 と置ける．通常の流体現象ではその近似が妥当で，このような流体を**非圧縮流体**と呼ぶ．それを (11.3) に代入すれば,

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad \text{あるいは}\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \qquad (11.4)$$

であり，速度場は横波である．音波が関わる現象を扱う際には，この条件は成り立たない．

11.2 運動量保存則とオイラー方程式

次に，流体の速度場に対する方程式を導きたい．この出発点は運動量保存則である．質量保存則を導いたのと同じ精神で，体積 V の中の運動量の増減を計算する．その寄与には 3 種類あって，(1) 流体粒子が運動量を持ち込む，(2) 外部の流体の圧力が表面を通じて内部の流体に力を及ぼす，(3) 流体の粘性効果による運動量の輸送，である．最初の二つの寄与から導出される方程式は**オイラー方程式**と呼ばれ，粘性のない理想流体に適用される．

問題 11.2　非粘性流体でのオイラー方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}$$

を運動量保存則の考えから導きなさい．

解答　体積 V の中の i 方向の運動量 P_i の時間変化

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) dV \qquad (11.5)$$

の原因を考えよう．一つは表面 S を通じての運動量の流出入である．この計算は先の質量保存則を導いたのと同じで，今回は ρu_i を一つのスカラー量と見なせばよい：

$$\int_S (\rho u_i)\boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_V \nabla \cdot ((\rho u_i)\boldsymbol{u}) dV. \qquad (11.6)$$

もう一つの要因は表面 S を通じて外部の流体の圧力が単位時間にする力積である．S の微小表面を通じて外部圧力が流体 V に及ぼす力は pda であり，方向は内向きであるから，ベクトル表示をすれば $-pd\boldsymbol{a}$ である（図 11.1 参照）．V に及ぼす力（ベクトル）は $-\int_S pd\boldsymbol{a}$ と表される．表面積分は体積積分に変更される．

$$-\int_S pd\boldsymbol{a} = -\int_V \nabla p \, dV. \qquad (11.7)$$

この式が正しいことは右辺で積分を実行すれば左辺になることから明らかである．

(11.6) と (11.7) の i 成分を (11.5) と結びつければ,

$$\int_V \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} dV = -\int_V \nabla \cdot ((\rho u_i)\boldsymbol{u}) dV - \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV$$

と表される．極限 $V \to 0$ をとれば,

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_i u_j = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad (11.8)$$

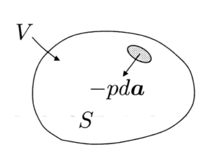


図 11.1　微小面積 $d\boldsymbol{a}$ を通じての外部圧力 p による力．

である．左辺を書き換えた

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}u_i + u_i\frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_j + \rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

での最初の 2 項は質量保存則 (11.3) からゼロになり，結局

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{11.9}$$

が得られる． ■

(11.9) はオイラーによって導かれ，粘性のない流体に対して成り立つ．左辺の第 2 項は**移流項**と呼ばれ，流体力学の方程式で重要な役割を果たす．実際の流体には必ず粘性があるので，それらに対してはオイラー方程式は適用できない．しかし基本的な移流項を含んでいるので，流体の研究に欠かすことのできないモデルである．

11.3 ナヴィエ–ストークス方程式

現実の流体には粘性があり，その効果によっても運動量の輸送があるので，前節での運動量保存則にもその効果を取り込まなければならない．粘性効果による輸送をどのように表現できるかを知るために，(11.8) を保存形式に書き換える：

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \tag{11.10}$$

ここで $\Gamma_{ij} = \rho u_i u_j + p\delta_{ij}$ であり，それは i 方向の運動量の j 方向へのフラックスである．これに粘性によるフラックス σ_{ij} を足す：

$$\Gamma_{ij} = \rho u_i u_j + p\delta_{ij} - \sigma_{ij}. \tag{11.11}$$

σ_{ij} は**粘性ストレステンソル**と呼ばれるが，その形は次のような要請から決まる：(1) 速度勾配に比例する，(2) i, j の交換に関して対称的である．この要請を満たす最も一般的な形は

$$\sigma_{ij} = \mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\delta_{ij}\right] + \zeta(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\delta_{ij} \tag{11.12}$$

である[1)]．μ の関係する項は，剪断流（速度ベクトルの大きさが，それに垂直な方向に変化する）での摩擦の効果を表し，一方 ζ の項は膨張，圧縮での摩擦の大きさを表す．μ と ζ は各々**剪断粘性係数**，**体積粘性係数**と呼ばれる．

(11.11), (11.12) を (11.10) に代入して，質量保存則 (11.3) を用いれば，

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\Delta u_i + \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}. \tag{11.13}$$

これを**ナヴィエ–ストークス方程式**と呼ぶ．非圧縮流体では一層簡単になり，

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\Delta u_i, \tag{11.14}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{11.15}$$

が成り立つ．ここで $\nu = \mu/\rho$ であり，**運動粘性係数**と呼ぶ．(11.14) が流体力学の簡潔にして，最も基本的な方程式である[*1)]．

問題 11.3 軸方向に圧力勾配 $\beta = -(1/\rho)dp/dz$ をかけた場合の半径 R の円管の中の速度場を，(11.14) より求めなさい．

解答 円管の中に流れを作り出すには，円管の軸にそって圧力勾配をかける．流れは軸方向に生じるが，中心近くほど速度は速く，壁では粘性のために速度はゼロである．軸方向（z 方向）の流れを $U(r)$（r は軸からの距離）とし，圧力勾配を $(1/\rho)\partial p/\partial z = -\beta$ とすれば，定常状態では，速度場 $U(r)$ に対するナヴィエ–ストークス方程式は (11.14) より

$$\beta + \nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U(r)}{\partial r}\right) = 0$$

である．これを解くと，

$$U(r) = -\frac{\beta}{4\nu}r^2 + A\log r + B$$

であり，A, B は未知数である．$r = 0$ で解が正

*1) ナヴィエ–ストークス方程式の有意な解の発見は，賞金 100 万ドルの 2000 年ミレニアム 7 問題の一つに指定されている；prize.problems@claymath.org. (Clay Math. Inst.)

則であるためには，$A=0$ でなければならない．また円管の壁では粘性のために流体は滑らないので，$r=R$ で速度はゼロである．すると

$$U(r)=U_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \tag{11.16}$$

でなければならない．ここで $U_0=\beta R^2/4\nu$ であり，パラボラ状である．このような流れを**円管ポアズイユ流**と呼ぶ．■

(11.16) はいつも実現されるのであろうか．それを確かめるには煩わしい計算が必要であるが，原理だけを述べる．(11.16) に小さな摂動 $\boldsymbol{u}'$ を加えて，それが時間的に減衰するか，それとも増大するかを調べる．安定性を決定するのはレイノルズ数 $R_e=U_0R/\nu$ の大きさであり，それが臨界値 $R_{\rm cr}$ より小さければ，流れは安定であるが，それを超えると不安定になる．流れのタイプにより $R_{\rm cr}$ の値は異なるが，数千のオーダーである．

(11.16) の速度分布を持つ**層流**が不安定になると，流れがすぐに**乱流**になるわけではない．乱流への遷移の仕方は流れのタイプによるが，典型的には，数個のモードが不安定になると，流れは乱流になる．

11.4 流体中の物体に働く力

実用上で最も重要な問題は，流体中を動く物体に働く力の計算である．力は 2 種類に分類されて，物体の速度の方向に働く力を**抗力**，垂直な方向に働く力を**揚力**と呼ぶ．自動車の場合は抗力が重要であり，飛行機の場合は両者が重要である．

この節では一様な流れ $\boldsymbol{U}$ の中の静止した球に働く抗力を考える（$-\boldsymbol{U}$ で動く座標系から見れば，静止した流体中を物体が動くことになり，働く力は同じである）．レイノルズ数が大きな流れでは計算は不可能であるが，レイノルズ数が小さな流れ（**ストークス流**と呼ぶ）では可能である．

まず一様な流れ $\boldsymbol{U}$ の中に固定された半径 R の球がある場合の速度場を計算しよう．定常で，レイノルズ数が小さいと，(11.14) の左辺はゼロと置けるので，

$$\mu\Delta\boldsymbol{u}-\nabla p=0. \tag{11.17}$$

ここで $\mu=\rho\nu$ である．境界条件は，

$$\text{遠方で } \boldsymbol{u}\to\boldsymbol{U},\quad \text{球上で } \boldsymbol{u}=0 \tag{11.18}$$

である．

問題 11.4　次の解（a,b は任意）

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{U}\left(1-\frac{a}{r}-\frac{b}{r^3}\right)+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{U}}{r}\boldsymbol{r}\left(-\frac{a}{r^2}+\frac{3b}{r^4}\right) \tag{11.19}$$

は (11.17) を満たすことを示しなさい．境界条件 (11.18) を満たすには $a=3R/4$, $b=R^3/4$ である．

解答　(11.19) が (11.17) を満たすことを示そう．(11.17) の curl（回転）をとると，

$$\nabla\times(\nabla p)=0=\mu\nabla\times\Delta\boldsymbol{u}=\mu\Delta\nabla\times\boldsymbol{u}$$

である．$\nabla\times\boldsymbol{u}$ に (11.19) を代入して，公式 $\nabla\times(f\boldsymbol{A})=f\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla f\times\boldsymbol{A}$ を用いると，

$$\nabla\times\boldsymbol{u}=\frac{2a}{r^3}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{U}. \tag{11.20}$$

これに Δ を演算すると

$$\Delta\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{U}=-\Delta\nabla\frac{1}{r}\times\boldsymbol{U}=-\nabla\Delta\frac{1}{r}\times\boldsymbol{U}=0$$

であることが示せる．なぜなら $1/r$ のラプラシアンはゼロだからである．したがって (11.19) は (11.17) を満たす．

$\boldsymbol{u}$ に対する境界条件は次のようになる．$r\to\infty$ で (11.19) は $\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{U}$ となるので，遠方での境界条件は満たされている．また $r=R$ とすると，

$$\boldsymbol{u}(r=R)=\boldsymbol{U}\left(1-\frac{a}{R}-\frac{b}{R^3}\right)+\hat{r}\cdot\boldsymbol{U}\hat{r}\left(-\frac{a}{R}+\frac{3b}{R^3}\right)$$

であるので，球上で $\boldsymbol{u}=0$ となるためには，$a=3R/4$, $b=R^3/4$ でなければならない．■

球に働く力の計算のために，速度場と圧力場を

計算しておこう．球の中心を原点にとり，$\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角度を θ とすれば，対称性の考えから，速度場は r 成分と θ 成分しかない．すなわち

$$u_r = U\cos\theta\left[1-\frac{3R}{2r}+\frac{R^3}{2r^3}\right], \quad (11.21)$$

$$u_\theta = -U\sin\theta\left[1-\frac{3R}{4r}-\frac{R^3}{4r^3}\right]. \quad (11.22)$$

圧力は次のように計算される．(11.17) の $\boldsymbol{u}$ のラプラシアンは，$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ のため，

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{u} &= -\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u})+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\\ &= -\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}).\end{aligned}$$

この式の右辺に (11.20) を代入して，公式 $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$ を用いると，

$$\Delta\boldsymbol{u} = 2a\nabla\times\left(\nabla\frac{1}{r}\times\boldsymbol{U}\right) = -\nabla\frac{2a\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

したがって (11.17) より

$$p = p_0 - \frac{3\mu R}{2}\frac{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \quad (11.23)$$

となる．

> **問題 11.5**　先の問題の結果を用いて，一様な流れの中にある球に働く力を求めなさい．

解答　球に働く力は，単位時間に球に伝えられる運動量であるので，流体要素による運動量の輸送と，圧力による力の伝達と，粘性による 3 つの寄与がある．いずれのものも球の表面における表面積分になるので，流体要素による直接の運動量輸送はない．なぜなら表面では速度はゼロであるからだ．したがって圧力と分子粘性によるものである：

$$F_i = \int_{\text{球面}}(-p\delta_{ij}+\sigma_{ij})da_j.$$

球面上での面積要素は r 方向しか向いていないので，$da_j=\delta_{jr}da$．また力は一様流 $\boldsymbol{U}$ の方向にしか働かないので，$\boldsymbol{U}$ への射影成分 F とすれば，

$$F = \int_S(-p\cos\theta+\sigma_{rr}\cos\theta-\sigma_{\theta r}\sin\theta)da$$

である．表面での σ_{ir} は (11.12) より

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \left(2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)_{r=R} = 0,\\ \sigma_{\theta r} &= \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right)_{r=R}\\ &= -\frac{3\mu}{2R}U\sin\theta.\end{aligned}$$

表面での圧力は (11.23) であるので，F は

$$F = 6\pi R\mu U \quad (11.24)$$

となる．■

このように速度の大きさに比例する抵抗を**粘性抵抗**と呼び，比例係数は $6\pi R\mu$ である．雨粒が空気中をゆっくり落ちてくる場合はこのような抵抗を受けている．速度が大きくなると，速度の二乗に比例する抵抗を受けるが，そのような抵抗は**慣性抵抗**と呼ばれる．

11.5 流体運動におけるカオス

天気予報が難しいのは，大気の運動を記述する流体運動が**カオス的**性質を持つからである．カオスの原因は運動方程式の解の**初期値敏感性**である．少し異なる 2 つの初期値に対するしばらく後の解は，互いに近いこともあれば，大きく異なることもあるということである．よく知られた不安定な力学系ではそれらの差は時間的に増大するだけであるが，カオスはそんなに単純ではない．

それを理解するために，初期値を実空間での小さなボックスの中にランダムにばら撒いて，それらの点の分布が時間と共にどのように発展するかを調べよう．ボックスの 3 辺を $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3$ としよう．頂点の座標を $\boldsymbol{x}$，3 辺の端を一般的に $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ で表すと（$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3$ のどれか），$\boldsymbol{x}$ は速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ で，$\boldsymbol{x}'$ は速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}')$ で移動するので，

$$\frac{da_i}{dt} = u_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})-u_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}a_j \quad (11.25)$$

が導ける．$\partial u_i/\partial x_j$ を**速度勾配テンソル**と呼ぶ．速度勾配テンソルを対称テンソル Λ_{ij} と反対称テンソル Ω_{ij} の和に分解するのが便利である：

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$
$$= \Lambda_{ij} + \Omega_{ij}.$$

対称テンソルが対角化されるような座標系を選び，その方向の成分を $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3$ とすると，$\Lambda \boldsymbol{l}_i = \lambda_i \boldsymbol{l}_i$. 反対称テンソルは渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$ を用いて，$\Omega_{ij} = -(1/2)\varepsilon_{ijk}\omega_k$ となる．すると (11.25) は

$$\frac{\partial \boldsymbol{l}_i}{\partial t} = \lambda_i \boldsymbol{l}_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{l}_i \qquad (11.26)$$

とまとめられる．第 1 項は速度勾配による伸縮を表し，第 2 項は角速度 $\boldsymbol{\omega}/2$ による回転の効果を表す．

3 辺が $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3$ で与えられる立方体の体積は

$$V = \boldsymbol{l}_1 \cdot (\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{l}_3) \qquad (11.27)$$

で与えられる．その時間変化を見てみよう．

> **問題 11.6**　立方体の各辺の時間変化が (11.26) で表されるとき，その体積 V の時間変化を求めなさい．

解答　(11.27) 式の時間微分をとると，

$$\dot{V} = \dot{\boldsymbol{l}}_1 \cdot (\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{l}_3) + \boldsymbol{l}_1 \cdot (\dot{\boldsymbol{l}}_2 \times \boldsymbol{l}_3) + \boldsymbol{l}_1 \cdot (\boldsymbol{l}_2 \times \dot{\boldsymbol{l}}_3).$$

ベクトル 3 重積の公式を用いると，

$$\dot{V} = \dot{\boldsymbol{l}}_1 \cdot (\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{l}_3) + \dot{\boldsymbol{l}}_2 \cdot (\boldsymbol{l}_3 \times \boldsymbol{l}_1) + \dot{\boldsymbol{l}}_3 \cdot (\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2).$$

これに (11.26) を代入すると，

$$\dot{V} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)V + \frac{1}{2}\Big[(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{l}_1) \cdot (\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{l}_3) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{l}_2) \cdot (\boldsymbol{l}_3 \times \boldsymbol{l}_1) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{l}_3) \cdot (\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2)\Big]$$

最後の 3 項はベクトル演算を用いると互いに打ち消しあって，結局

$$\dot{V} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)V$$

となり，$V(t) = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}V(0)$ で変化する．

■

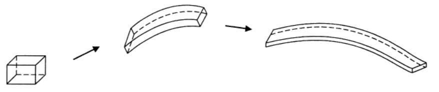


図 11.2　微小ボックスの時間変化．

ボックス自身は局所的な渦度の半分の角速度で回転しながら，同時に各辺は $\mathrm{e}^{\lambda_i t}$ で伸び縮みしている．しかし非圧縮速度場は，**非圧縮条件** $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ を満たすので，$\sum_i \lambda_i = 0$ である．λ_i の内 1 個は必ず正であり，1 個は必ず負である．中間のものは実際正にもなり．負にもなることが分かっている．すなわち 1 方向には必ず伸ばされ，1 方向には圧縮を受け，微小体積は一定である．最初は立方体だったものが段々と変形を受けて薄っぺらで一方には広がった板状かひも状になる (図 11.2 参照)．初期の 2 点が λ_i が負の方向にずれている場合は，時間が経つとその間隔が狭まる．それに対して λ_i が正の方向にずれている場合は，その差は時間と共に指数的に増大する．初期の状態に大きく依存する．

大気の運動がカオスだとすれば，どのように対処すればよいか．観測データを初期値にして，数値計算を行う．しかし観測データには誤差があるから，観測データの周りに誤差に相当するボックスを考えて，その中に適当にデータをばら撒く．それらのデータを初期値にして数値計算をして，その結果を確率的に表す．現在の**数値予報**ではそのようなことが行われている．

参考文献

1) 粘性項の表現に対する詳しい議論は，例えば，ランダウ，リフシッツ著，竹内均訳：『流体力学』，東京図書 (1970) を参照のこと．

（かとり・まこと，中央大学理工学部）
（なかの・とおる，中央大学理工学部）



物理の道しるべ
～研究者の道とは何か～
第13回

マイノリティの道を歩んできて

村尾　美緒

1. はじめに

「物理の道しるべ」，ということでリレー連載の原稿の依頼があり，さほど深く考えずにお引き受けしたが，リレー仲間の錚々たる先生方のお名前を拝見するにつれて，場違いなところにまぎれこんでしまったと感じている．私は他の先生方に比べて若輩者であり，偉大な業績があるわけでもなく，まだ道半ばの研究者であると言える．また，量子情報という，1990 年代以降に発達した伝統が薄いマイナーな分野の研究をしており，その上，日本の物理業界では圧倒的マイノリティの女性でもある．

大学で教えていると，折に触れて学生たちと「研究者とは」ということについて話す機会がある．好きな研究に打ち込める上に世間からも尊敬される仕事，というイメージで研究者に憧れている学生は多い．だが，どうしたら研究者になるのか，どのような研究者がより必要とされているのか，というような具体的な研究者の姿については案外知られていないように思う．振り返ってみると，私自身も学生の頃は，漠然と研究者は面白そうな職業だと思っている反面，どうしたら研究者になれるのかはよくわからず，自分の実力で研究者になれるのかどうかも自信がなかった．

私の場合は，まあとりあえず行けるところまで行ってみよう，という開き直りとも言えるチャレンジ精神を原動力に，試行錯誤を繰り返しながらたくさんの偶然と幸運に助けられて，マイノリティな研究者の道を歩んでくることになった．しかし，私より実力があっても幸運に恵まれずに，研究者の道を断念せざるを得なかったケースもあると思う．とても残念なことである．私が博士号を得たのは 1996 年で，研究者歴はまだ 13 年である．今後，他の人々のお手本になれるような研究者として進んでいけるかどうかも不明であり，研究者の道を語る物理学者として場違いであるのは重々承知している．しかし，手探りでマイノリティな研究者の道を歩む可能性のある若い人々の多少の参考になればと考え，僭越ながら，私が量子情報の研究者にたどり着くまでに通った分岐点を紹介してみたい．

2. 物理の研究者を目指すまで

高校時代，私は勉強量に対して得られる試験の点数の効率の良さに感激し，物理の才能があるかもしれないと勘違いをして，大学では物理を学ぼうと考えた．当時のお茶の水女子大学（お茶大）理学部物理学科の二次試験の入試科目は物理と数学のみだったので，英語が苦手で怠け者の私は，こ

れ幸いとお茶大の物理学科を目指すことにした．

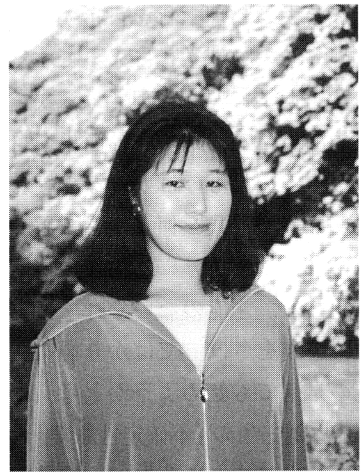
しかし，大学の物理学科に入ってすぐに失敗したと感じた．大学で習う物理では，式を立てるまでは比較的簡単だが，式の解は簡単に自力では思いつくことできないものばかりなのである．物理というのは微分方程式を何とかして解くことだと誤解していた私は，自分には物理の才能はなさそうだと落胆した．才能のない分野で努力する気にもなれず，講義をさぼってばかりいた．物理などやめて他の学問でも始めようかと考えた矢先，講義で並木美喜雄先生の『不確定性原理』という本を読んでレポートにまとめるという宿題が出た．ここで量子力学に出会ったことで，逆に物理の魅力にとりつかれることになったのである．一見常識に反して奇妙に思える現象も，量子力学に従うと完全に論理的に説明できる．また，量子力学では，観測は状態の一部の性質を引き出すことにすぎず，観測結果のみから元の状態の性質をすべて知ることはできない，ということを知ったときは目から鱗が落ちる感覚だった．これまで見えていたものが，より大きいことの一面にすぎないとわかったとき，これまで常識であると思っていたことが思い込みにすぎず，本質は別にあるとわかったときの，急に視界が晴れて広がった感じの爽快感．これに魅了された．私は今でも，この爽快感を味わうために物理を続けているのかもしれない．

量子力学との出会いと匹敵するほどの私の分岐点となったのが，学部生のときに同級生の北浦（湯本）麻子さんと二度にわたってヨーロッパ旅行をしたことである．アルバイトをして費用を稼ぐことから始まって，旅行の計画や手配を試行錯誤しながら進めた．貧乏旅行ではあったが，観察眼の鋭い彼女と共に，新しく触れる物事に対して物理学実験で培った事象に対する観察・発見・驚き，そして分析・仮説・考察・記録を繰り返す，楽しい毎日だった．この経験によって，自分が先に進むときには「棚からぼたもち」を待つのではなく，自ら企画して行動すればよいのだ，ということを学んだ．世界の多様性を知る一方で，国によって外見や習慣などの表面は異なるように見えても，人間の本質的な内面はさほど違いがないということもわかり，外の世界に対する心理的なバリアが格段に低くなった．また，コミュニケーションの道具としての英語の必要性も痛感した．マイノリティな研究者の道を歩む場合には，他者のお膳立はあまり期待できない．だから，研究の力以外にも自ら企画して行動する力が要求される．この旅行は，私にとって，マイノリティな研究者の道を歩むための良い訓練になったと思う．

さて，学部の卒業研究で非平衡量子統計力学の理論研究をしている柴田文明先生の研究室を選び，修士を終えたら企業に就職をするつもりで，あまり深く考えずにそのまま柴田研の修士課程に進んだ．学生気分がいつまでも抜けず，あれこれ勉強に手を出した割には詰めが甘くてあまり身に付かなかったと思う．もう少し目的意識をもってこの時期を過ごせば良かったと反省している．就職活動では電機メーカー各社をまわったが，その過程で，私が物理をやっている原点は量子力学にあり，量子効果を使ったデバイスの研究や開発に携わりたい，という気持ちになった．そのような量子効果デバイスの研究ができる場所は限られている．訪ねた中で唯一量子効果デバイスの研究をしていた日立中央研究所のグループから「今年の採用予定はないし，この手の研究をしたいなら大学のほうが良いのでは」と聞いて，私は就職はやめて博士課程に進む決心をした．修士課程2年生の5月頃だった．もっと量子の研究をしてみたい，まずは挑戦してみて，うまくいかなかったらそのとき考えよう，と思ったのだった．このように気軽に博士課程進学を決心できたのには，同じ柴田研で既に博士課程に進むことを決めていた同級生の根本香絵さんを初め，他大学の博士課程に進んだ安居院あかねさん，中澤初美さん，柴田研の先輩の内山智香子さんや中島（下尾）由美さんの存在も大きかった．特に根本さんとは，修士課程以来現在まで，折あるごとに助け合い励まし合うことになる．

ところで，私は女子大の意義など考えずに，入りやすい大学という理由でお茶大に入学したが，学

部・大学院を通して素晴らしい仲間や先輩たちに恵まれ，マイノリティとして居心地の悪い思いを全くせずに物理の勉強ができたのは，とても幸運だった．また，私が在籍していた頃の物理学科には，伊藤厚子先生と田中翠先生という異なるタイプの2人の女性物理学者がロールモデルとして身近にいたことも大きかった．日本では女性の物理学者がこれほどまで少ないということを知っていたら，この業界には女性であることで努力が報われない何かがあるのかもしれないと疑って，物理学者を目指すには大きな覚悟が必要だったかもしれない．


研究者を目指し始めた1993年頃の筆者．

3. 試行錯誤で挑戦を続けた博士課程の頃

博士課程進学を決心してからLandau–Zener散逸モデルの研究を始めた．試行錯誤しながら一歩一歩進めることがとても楽しく，お正月も大学で研究を続けたほどだった．自分には案外根性があることを発見したが，根性だけでは研究者にはなれないだろうから，何か違うことも身につけないといけない思った．ここで思い出したのが，学部の頃のヨーロッパ旅行の体験である．海外で新しい世界に触れながら物理を探求することができれば，何か新しいことが開けるかもしれないと考え，早速行動に移した．柴田先生に相談して，ドイツのUlm大学のHannes Risken先生を紹介していただき，ドイツ語学校にも通って留学に備えた．しかし，ドイツ学術交流会（DAAD）の奨学金の審査に落ちてしまい，留学をあきらめることになった．なぜ奨学金に一つ落ちたぐらいで他の方法を考えずに簡単に留学をあきらめてしまったのか，今考えると不思議だ．だが，私が留学を希望していたRisken先生はこの数年後に急逝されたので，このときドイツに留学していたら私の人生はまた違った展開になっていただろう．

博士課程に進学した頃，ヨーロッパには大学院生のためのサマースクールというものがあることを知り興味を持った．しかし，サマースクールがどこで開催されるか，そしてどのようにエントリーするかもわからなかった．1993年当時はwebも発達しておらず，e-mailでの問い合わせ先もわからなかったので，私は根本さんとともに，日本物理学会に問い合わせたり，ヨーロッパ物理学会にサマースクールについて問い合わせる手紙を国際返信用切手入りで送ったりした．幸運にも，当時東工大にいらした北原和夫先生の研究室の宮崎洲正さんがオランダのLeiden大学に留学されていて，そちらの先生がドイツで統計力学のサマースクールを主催するという情報を得ることができた．また，ヨーロッパ物理学会からも，イタリアで開催されるEnrico Fermiサマースクールの案内を受け取った．さらに柴田先生の紹介により，前述のRisken先生とTübingen大学のOtto Rössler先生の研究室訪問ができることになった．私と根本さんは，何とか自分たちでお金を工面し，1993年の夏にヨーロッパ修行に旅立ったのである．

ドイツでの統計力学のサマースクールはケルン郊外のアルテンベルグで2週間開催され，22カ国から101人の学生が参加している大規模なものだった．私にとって初めて参加した国際サマースクールということで，すべてにおいて興味津々だった．英語で講義を受けることも初めてだったことに加え，それまで勉強したことのないソフトマターの講義などもあり，講義の内容はかなり意味不明のものもあったが，何とか理解しようと一生懸命にノートをとった．学部のヨーロッパ旅行以来，独

学ながら訓練していた英語が役立った．ポスターセッションでは，Landau–Zener散逸モデルの発表をして，様々な人々と議論をすることができた．各国から来ていた女子学生の数人とも知り合いになることができ，マイノリティな物理学者の道について様々な問題を語り合った．また，この3年後に私と結婚することになる，英国出身で当時アメリカの大学院に在籍していたJoe Watsonと知り合うこともできた．

次に参加したイタリアのサマースクールは，風光明媚な観光地として知られるコモ湖畔のヴァレンナにあるVilla Monasteroという豪華な館で開催された．生徒数は30名程度で，近くのホテルに分散して宿泊する．昼食と夕食は，同じホテルに宿泊している学生のグループに加えて講師の先生方がかわるがわる参加し2時間かけてフルコースを一緒に食べるので，参加者の学生や講師の先生方との交流が深まった．また，日本から農工大の宮田清蔵先生と理研の雀部博之先生が一週間ずつ講師としていらしており，先生方が我々のグループでお昼や夕食にいらっしゃった際などに様々なお話を伺うことができた．

さて，博士課程に進学してからは，スピンとボソンの結合系であるJaynes–Cummings系の熱平衡への緩和理論の研究に取り組んでいた．このような結合系に対して，それぞれの量子系に熱浴を独立につけるような従来の緩和モデルを用いると，量子系間の相互作用を無視した熱平衡状態に緩和してしまうため，新しい理論が必要だった．ヨーロッパに行っている間にも研究を進め，ある程度結果が出た博士課程2年の頃，物理学会誌にイギリスのノッティンガムで開催される量子通信測定国際会議（QCM）の案内が掲載されているのを発見し，国際会議に挑戦することにした．ポスター発表が決まり，主催者である玉川大学の広田修先生のご尽力により会議の参加料を免除していただけた．それ以外の費用は自己負担だったが，ドイツのリンダウで開催されたノーベル賞受賞者会議，前年のサマースクールで知り合った様々な人々の訪問，休暇旅行を組み合わせることにして，またしても夏休みにヨーロッパへ旅立った．

この国際会議に参加したことが，量子情報の研究者としての道への分岐点だったと思う．この国際会議は，後に量子情報の分野の代表的な国際会議に発展したもので，名古屋大学の小澤正直先生，Queensland大学のGerard Milburn先生，Imperial CollegeのPeter Knight先生など，この分野の代表的な研究者と知り合いになることができた．Milburn先生には，Jaynes–Cummingsモデルが量子光学のイオントラップのモデルとして使えるとの助言をいただいた．抽象的なモデルだと思っていたものが実際の物理系に結びつくことを知り，その後，量子光学に進むきっかけになった．また，博士論文を早めに終わらせてQueensland大学のポスドクに来てはどうかとの励ましをいただいた．この励ましによって多少の自信ができ，その後はより真剣に研究に取り組むことができたと思う．それから，当時英国に留学中のサウジアラビア出身の女子学生であるHanan Batarfiさんと知り合ったことも忘れ難い思い出である．周りの環境がどうであろうと自分の道を自分で切り開く彼女の姿を見て，とても勇気づけられた．

ところで，実はこの年も英国やフランスで開催されるサマースクールに申し込んだのだが，どちらも申込者多数ということで選考に漏れてしまった．サマースクールはお金と手間をかけて大学院生を教育するもので，希望者が定員を上回っているときに，どこの誰だかわからない平凡な学生を選ぶわけがないのだが，このことをよくわかっていなかった．指導教員に加えて少なくとも一人は，サマースクールと関連が深い先生か，その分野の著名な先生に推薦書を書いてもらうべきである．

次の年の1995年にフランスのレ・ズーシュでのサマースクールに応募する際には，前年の失敗を踏まえてMilburn先生にも推薦書をいただき，無事選考を通ることができた．サマースクールの講師陣は，Knight先生を初め，Écde Normale SupérieureのSerge Haroche先生，Innsbruck大学のPeter Zoller先生など，量子光学のオールスター勢ぞろいだった．ポスドクによるセミナーでは，Adri-

ano Barenco さんによる量子計算の紹介があり，参加者の誰もがこの画期的な新しい研究分野に興奮していたと思う．また，Martin Plenio さん，Ulf Leonhardt さん，Hideo Mabuchi さんのように現在では分野をリードする研究者になられた参加者も多く，とても活気に満ちていた．このサマースクールの主催者は女性の Elisabeth Giacobino 先生で，参加者約 45 名の 1/3 は女性であった．物理のサマースクールでは珍しいということだったが，多くの女性研究者と知り合う貴重な機会となった．

4. 谷あり山ありのポスドク時代

博士号をとり，数理科学振興財団からの援助をうけて，米国 Harvard 大学の Eric Heller 先生の研究室で短期間のポスドク生活を始めた．だが，のんびりしたお茶大と，世界中から我こそはと思っている人が集まっているような Harvard 大学では差がありすぎて戸惑い，劣等感が深まった．新しく着手した研究が思うように進まず，ニューイングランドの素晴らしい春の陽気の下にも関わらず，鬱々とこれまでの研究を続けていた．そんなとき，たまたま Roy Glauber 先生のポスドクであった Hans Briegel さんと立ち話をする機会があり愚痴をもらすと，ここの人々は自信満々に見えるけれど，皆必死になって頑張っているだけだから，気にしないでマイペースで研究を楽しむべきだというアドバイスをいただいた．同じ頃，博士論文の審査員だった，お茶大数学科の藤原正彦先生も同様なことをおっしゃっていたと伝え聞いた．これらのアドバイスに私はとても救われたと思う．周りと比較して自分はだめだと思って立ち止まってしまうよりも，他人は他人と開き直って，自分にできることを一歩進めることが肝要だ．このようなときには，自分の殻に閉じこもらず，愚痴でもよいので周りの誰かと話をすることをお勧めする．何か突破口が開ける可能性がある．

夏からは英国に移り，ロンドンの Imperial College の Knight 先生の量子光学理論の研究室で学術振興会の海外特別研究員としてポスドク生活を始めた．この研究室に行って最も驚いたのは，英国の大学なのに英国人が少ない，ということである．英国人はボスである Knight 先生とキプロス系英国人のポスドク 1 人のみであり，ドイツ人 4 名，ギリシャ人 3 名，それ以外は多国籍の各国一人ずつ，というような構成だった．量子光学に関わる何か面白い研究をしたいという同じ目的の下に，世界各地から多様なバックグラウンドを持つ人々が集まっていて，トップグループに特有のとても活力に満ちた研究室だった．

私は最初，Jaynes–Cummings 散逸モデルをイオントラップ系のデコヒーレンス解析に応用する研究に取り組んだ．実験で測定された特徴的なデコヒーレンスを説明するために，イオンと振動モードとの結合が揺らぐというモデルを考え，論文にまとめて Knight 先生に提出した．しばらくしても Knight 先生からは何も応答がなかったが，先生はとてもお忙しそうだったので遠慮して何も聞けなかった．この遠慮は大きな失敗だったと思う．研究が滞っている上に，ロンドンの住居では風呂が水漏れしたりボイラーが故障したりする災難が続いた（日本と違って英国の住居や家電はすぐに壊れるので覚悟が必要である）．ビジネスマンになったばかりの夫は出張が多く，仕事の停滞感に加えて英語の微妙なニュアンスがわからないことなどもあいまってストレスが高まった．冬でいつも雲が低くたれこめており，約 100 年前にロンドンで夏目漱石が感じただろう，憂鬱な気持ちがよく理解できたものだった．

1996 年の物理学科のクリスマスパーティーの際に，台湾からポスドクで来ていた Shih-Chuan（通称 Philip）Gou さんに，Knight 先生と議論する機会もないし仕事がうまくいっていない，という愚痴をもらした．Guo さんはその頃帰国間際だったのだと思うが，私が困っているという状況をポスドクの Plenio さんや大学院生の Vlatko Vedral さんに話してくれたのだと思う．Plenio さんと Vedral さんが，一緒に量子情報の研究をしようと誘ってくれ，多量子ビットのエンタングルメント精製プロトコルの研究を始めることになった．エンタングルメントや，エンタングルメントを考える際に

大切な局所的な操作とは何か，という初歩から学び始めたのだが，量子力学の本質的な性質を情報処理に役立てようとする量子情報の分野は，まさに私の求めていた研究であり，日々新しい概念に触れて自分なりの理解を進めることが，とてつもなく楽しかった．この頃は量子情報の分野も始まったばかりであり，方法論なども確立しておらず未知のことだらけで，特に多量子ビットのエンタングルメントの性質はほとんど何もわかっていなかった．そのため，ヒントも少なく手探りで研究を進めていたが，得意の試行錯誤で何とかプロトコルを見出して論文を書くことができた．

次に，多量子ビットエンタングルメントを量子情報処理の資源として使うことができないかと考え，様々なタイプの多量子ビットエンタングルメントの性質を調べた．この試行錯誤の過程で生み出したのがテレクローニングである．テレクローニングはエンタングルメントを資源として用いることによって，量子ゲート演算をせずに，局所操作のみを用いて量子情報の最適量子クローニング演算という情報処理を行うものであり，このタイプの量子情報処理としては世界でも最初の提案の一つだった．思いついてみれば簡単なことであり，他の人が思いつくのも時間の問題と思い，焦って3日ほどで論文のドラフトを仕上げた記憶がある．このテレクローニングの仕事で，量子情報の分野で研究者としてやっていこうという決心がついた．

ところで，Imperial College では，議論によって加速的に研究を進めることを学んだ．1人でじっくり考えることも大切だが，様々な背景を持つ多様な人々と議論をしていると，お互いに1人だけでは思いつかなかったアイディアが浮かぶことがよくある．このような議論を成功させるためには，暗黙の仮定を排除して論点をクリアにし，他の人にわかりやすく説明する能力と，周りの人々から思いがけないアイディアを引き出すような能力が重要である．自分の研究だけではなく，周辺の研究者の潜在能力を引き出して，新しい研究の流れを作り出せる研究者こそが優れた研究者であり，そのような研究者はどこに行っても引く手あまたとなる．若いうちから，このことを自覚することをお勧めしたい．実際に，前述の Vedral さん，Plenio さんに加えて同僚だった当時大学院生の Sougato Bose さんもまさにこのタイプであり，現在ではそれぞれ量子情報を代表する研究者となっている．

物理学者に限らず研究者の仕事は，これまでは誰も知らなかったことを発見したり，これまでは不可能であったことを可能にすることで人類の英知を一歩進めるものである．だが，世界中の頭脳明晰な人々が多くの時間を費やしてもわからなかった問題の答えを得ることだけが研究ではない．我々には，これまでに他の研究者が誰も考えてこなかったオリジナルな問題を考えて，答えを発見をするという道も残されている．新しい分野には未解のオリジナル問題がつまっていることにも，目を向けてほしいと思う．

5. おわりに

このようにして量子情報の研究者としての道を歩み始めた後，1999 年に私は夫とともに日本に帰国し，理化学研究所の基礎科学特別研究員として青柳克彦先生の半導体工学研究室にお世話になった．2001 年には，夫に叱咤激励されて東京大学物理教室の公募に応募し，幸運にも助教授に採用された．東京大学に移籍する直前に子供が生まれ，現在は，育児と仕事との両立をまたもや試行錯誤しながら，研究者の道をよろよろと歩いているところである．

これまでを振り返って，私が行く先々で素晴らしい先生，先輩，同僚，友人，学生たちに恵まれてきた幸運を再認識した．また，子供の頃から科学の面白さを教えてくれた研究者の父，育児を手助けしてくれている母，そして研究者への道の途中で出会い，研究者の道を進むことを支えてくれた夫など，家族の励ましがなければ，私がマイノリティな研究者の道を進むことは到底できなかったと思う．すべての人々に再度の感謝を申し上げて筆を置くことにする．

（むらお・みお，東京大学大学院理学系研究科）



数学にひきつけられて

石井　志保子

1. 名前について

私は富山県高岡市に生まれました．父は開業医，母は薬剤師の資格を持ち家事の傍ら父の医院を手伝っていました．祖父は私の生まれるずっと以前に亡くなり，祖母は女学校の理科の教員をしていたそうですが私が物心ついた頃は既に退職し，悠々自適の生活を楽しんでいました．祖母の両親は大変貧しかったそうですが，当時の地方出身の女性としては珍しく，東京女子高等師範学校を卒業していました．祖母は地元の師範学校を出て一度教員になって学費をためてから東京女子高等師範に入ったそうです．

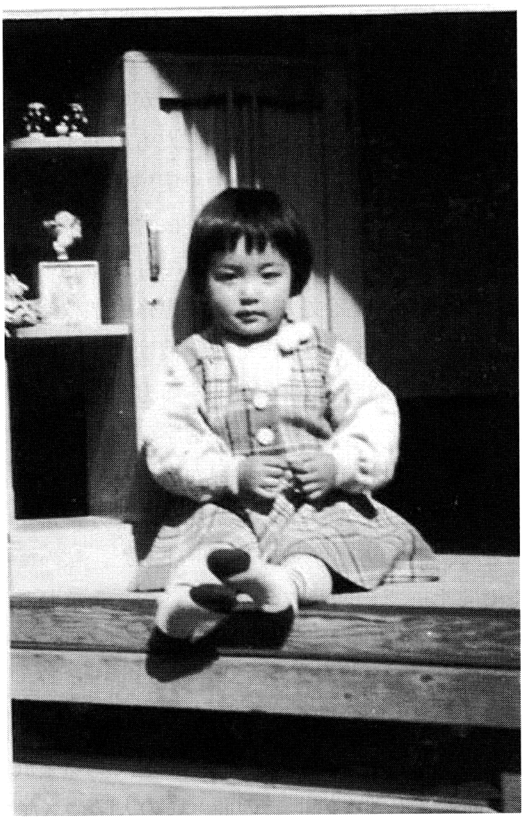
父は最初の子供である私にかわいらしい名前を付けることを考えたそうですが，祖母が「そんな名前はやめなさい．『志保子』というのが良い名前だから，志保子にしなさい」と言ったのでこの名前になったそうです．小学校の頃はこんな名前の友達は誰もおらず，男の子から「変な名前」とからかわれたこともあります．でも今は本当に良い名前を付けてもらったと感謝しています．

当時は伝統を重んじる習慣が残っており，女の子が生まれたらおひな様を，男の子が生まれたら鯉のぼりを，無理をしてでも買うことがよくあったようですが，祖母は「そんなものを買うのは馬鹿げている．子供に本を買ってやったほうがずっと合理的なお金の使い方だ」と主張したので私も3歳下の弟も，ひな人形や鯉のぼりとは無縁でした．小さい頃はひな人形を持っている友達をうらやましく思ったものですが，本には不自由しなかったのはとてもありがたいことでした．

2. 小中高校生時代

小学校の頃には『赤毛のアン』や『若草物語』を楽しむ一方で，科学読み物をよく読みました．金以外の安価な金属から金を合成しようという野望に取り付かれた錬金術師の話，そしてそんな錬金術師が科学を発展させたことをわくわくする気持ちで読んだものです．

中学に入ってからも科学読み物を読みましたが，小説もよく読みました．特にゲーテの小説からは何かしら「崇高な」香りを感じ，『ファウスト』は何度も読みました．幼いながら何かしら感じるものがあったのでしょう．一方で『星の王子様』のような本は短い本にも関わらず何回か読もうとして，結局最後まで読み切れず放り出してしまいました．著者が何を言いたいのかさっぱりわからなかったのです．これは20歳を過ぎても同様でした．今この年齢になってようやく「ああこのくだりはこのことを言っているのだ」と一つ一つのこ

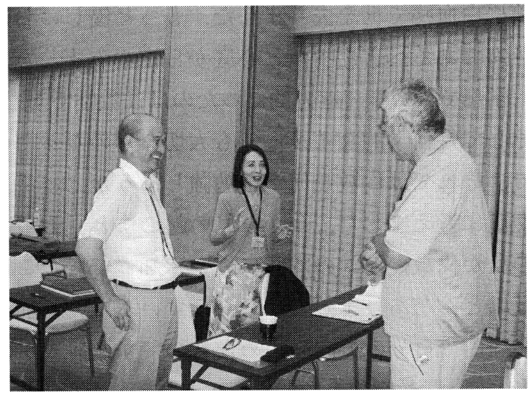


3 歳の頃.

とが思い当たり，感動できるようになりました．それぞれの人には，その本を読むのにふさわしい時期というものがあるのでしょう．

中学の頃は酸とアルカリによって朝顔などの色素が変化することがとても面白く感じられ，実験と称して色々なことを試してみました．夏休みの自由研究で，友達を何人も実験台に使い，唾液の pH を計って疲労度との関係を調べ，富山県の科学展で入賞したこともありました．また，根から吸い込む水がアルカリ性に変わったら花の色も変わるかどうかを調べたくて，鉢植えに重曹を混ぜた水をかけ，花を枯らしてしまったこともありました．

高校に入ってからは，それまでの「質量保存の法則」や「ニュートンの運動方程式」の枠から外れた「相対性理論」が私を魅了しました．科学読み物で速度が光速に近づくと質量が無限大になるという公式を見て，深く感動しました．こんな「カッコいい」ことがこの世に存在するのか，と思いました．当時の私たち高校生の最高の褒め言葉は「カッコいい」でした．一つの公式で常識の枠内のこともその枠から外れたことも記述しているのです．これがカッコ良くなかったら何をカッコいいというのでしょうか．生涯でこんな公式を一つでも発見したいものだと思いました．そのときの窓の外の夕暮れの景色を今でも覚えています．



2007 年，主催した日仏特異点シンポジウムにおいて．

3. 学部生時代

大学に入り現代数学を勉強し始めてから，感動することがさらに多くありました．まずは ε–δ 論法，さらにトポロジーの概念，部分群による類別の概念，また群環体と演算が増えるだけで様相ががらりと変わる代数構造も「すごい」ものでした．感覚的な概念から本質を抽象し定義を打ち立てる現代数学の方法に，「本物の数学」を勉強している喜びを感じたものです．

大学へ入って初めての夏休みに帰省したときに，新しい概念に興奮気味の私は，高校生の弟に，高校で取り扱う極限の定義が如何にいい加減なものであるかをいくつも例を挙げて説明し「では極限の本当の定義を与えてごらん」と問いかけました．すると弟は何回か試行錯誤の末 ε–δ 論法と同等の定義を見つけたのでした．これで弟を見直すと同時に，数学は普遍的なものらしいということ，すべての人に開かれたものであるらしいことを感じました．横道にそれますが，この弟は今から 10 年

前に白血病で世を去りました．もっと優しいお姉さんであるべきだったと心底から悔やみました．

学部での数学で魅力的だったのは代数学でした．そして幾何学的なイメージも大切なものだったので，それでは代数幾何学を勉強しようか，とごく安直に考えました．今から思い起こすと，その頃の私が代数幾何学の内容について知っていたことはほとんどありませんでした．ずいぶんいい加減な理由で自分の方向を決めたものです．何人かの先生に「代数幾何を勉強したい」と言ったら「それは大変ですよ」とおっしゃるのが常でしたが，能天気にも，「チャレンジのしがいがある」と思ったものでした．

4. 修士時代

修士課程は早稲田大学で有馬哲先生に指導を受けました．学期の初めに挨拶に行って，少し雑談の後，今後の方針を話し合ったとき，先生はなぜか「学部4年生と修士1年生にそれぞれセミナーがあるが，学部のセミナーのテキストはとても良いものだから学部のセミナーに出るように」としきりに勧められました．それで，学部のセミナーに出席することにしましたが，修士のセミナーにも出るのが当然だと思っていましたのでそちらにも出席し，そして当然のように両方で発表をしました．学部のテキストはMumfordの『Algebraic Geometry』で，修士1年生のものは『Faiseaux Algébrique Cohérents』(通称FAC) でしたが，この両方をしっかり勉強できたのはとても良いことでした．後でわかったことですが，有馬先生は修士の初めの私の基礎知識があまりにも少ないのに驚かれたそうです．「石井は修士に入ったとき，環の局所化も知らなかったのに，やがて（オリジナルな）修論を書いてしまった」というエピソードが学外にも伝わっていたようです．

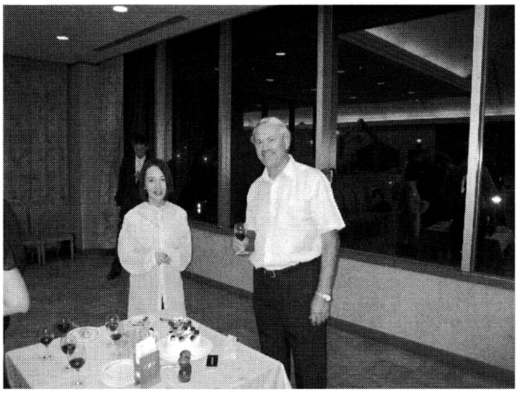
修士在学中，Mumfordの『Algebraic Geometry』は私のバイブルとなりました．当時使っていた本は海賊版のペーパーバックだったのでぼろぼろになってしまったくらいです．最近「この本があまりに抽象的で無味乾燥であることをMumford自身が反省していた」ということを聞きましたが，私にとっては，すべての源となった本でした．毎日勉強した後，夜寝る前には自分が朝起きたときとは別人になったような気がしたものです．それほど新しいことを吸収したのを実感する毎日でした．このような日々でセミナーは常時3つぐらい平行して行っていましたが，とても役に立ったのは1学年上の日高文夫さん（現専修大学教授）と一緒にやった自主ゼミでした．彼はとても広く深い知識と，それを明快に説明する力を持っておられました．それにより代数幾何学の世界は魅力にあふれ，背後に不思議議の世界が広がっていることを実感できました．また，明快な話し方に接することで，話し方の勉強にもなりました．私の授業やセミナーでの話し方の基礎はこのとき培われたと思います．

5. 修士修了後

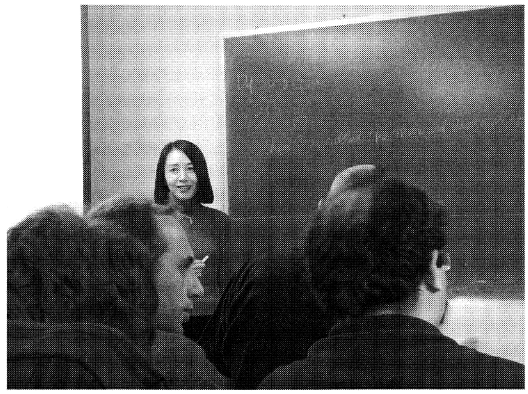
修士を修了した後，結婚し夫の任地である金沢で3年間過ごしました．この間どこの大学にも属さなかったのですが，金沢大学の酒井栄一先生，古田孝臣先生のご配慮で大学の図書館や施設を使わせていただき，また当時学生だった竹腰見昭さん（現関西大学教授）や金沢医科大学の吉野健一先生と一緒にセミナーをさせていただき，小平-Morrowの『Complex Manifolds』などを輪読し充実した生活を送りました．この間修論をまとめたものがドイツのジャーナルに掲載されたのですが，自分の証明が活字になるというのはとてもエキサイティングな経験でした．この論文は名古屋大学の浪川幸彦先生に色々相談に乗っていただき，英語も添削していただいたものです．振り返ってみれば，私の人生には酒井先生や古田先生，浪川先生のような無償の好意によって支えられてきたことが本当に多くありました．

6. 博士課程

夫の金沢での任期が終り，東京へ戻ってからは東京都立大学の大学院博士課程で笹倉頌夫先生の学生になりました．笹倉先生は数学的には，とて



2007年，主催した日仏特異点シンポジウムパーティーにて．



2008年，スペイン，セダーノにおけるワークショップで8時間の連続講演．

も大きな構造を求めるタイプの数学者で，数学者なら誰でも持っている性向を極端化した性格の持ち主のようでした．最初は驚くこともありましたが，だんだんに慣れ，愛すべき先生の行動をちょっと面白がるまでになりました．先生は歩きながら考える癖を持っておられ，セミナー中でも，何か思いつくと立ち上がってそのまま部屋を出て行かれることがよくありました．あるとき，考えながら外を歩き回っておられるときに，警官に職務質問されたことがあって，いくら「大学の教授だ」と言っても信じてもらえず，大学に電話をして事務員に証明してもらったということがあったそうです．先生ご自身がそのようなエピソードをとても楽しそうにお話しになるのが可笑しいことでした．笹倉先生とのセミナーの他に，渡辺敬一先生（現日本大学教授），宮岡洋一先生（現東京大学教授）のセミナーにそれぞれ出席させていただき，多くのことを学びました．お二人とも当時は助手で，タイプは違うのですが，打てば響くような頭脳明晰な先生たちでした．数学的には，私は笹倉先生だけでなくこのお二人の弟子とも言えるのではないかと思います．

博士課程ではモデュライ理論に興味を持ちました，色々な対象の不変数を固定してモデュライ空間の構成を片端から試みていました．学位論文になったものも局所環を固定しその余次元を固定した部分環のモデュライ空間の構成とその性質についてでした．モデュライ空間の構成においてはヒルベルト空間の点が群の作用において安定的であるかどうかが重要なポイントになるのですが，その点に対応する多様体がある程度複雑な特異点を持っているだけで安定性が崩れてしまうという現実に遭遇しました．この邪魔な特異点を何とかしなければならない，という思いで特異点の勉強を始めたのがきっかけで，それ以来特異点を永く研究するようになってしまいました．当時筑波大学の渡邊公夫先生（現早稲田大学教授）が孤立特異点の多重種数を定義され，これを用いて特異点について色々な発見をされていたところでした．私の特異点に関する最初の論文は，この多重種数とSteenbrinkの導入したDu Bois特異点の関連を見つけたものですが，このような未知の分野で自分が貢献できることはとても嬉しいことでした．この時期は子供がまだ小さく，育児や家事がとても大変な時期だったのですが，数学をすることも，子供を育てることもこの上ない喜びで，毎日大車輪の日々でした．朝大急ぎで朝食の後片付けをして子供を保育園に送っていき，それから非常勤講師としての仕事先に着いてレインコートを脱いだら，下にエプロンをしていた，などということもよくありました．またクリーニング屋のタグが着いたままの服を気づかずに着て，シンポジウムの講演会場にあたふたと駆けつけ，タグをひらひらさせながら講演したということもありました．そ



30 年間続いている「特異点月曜セミナー」.

の後特異点に関する論文をいくつか書き，国際シンポジウムで講演する機会も頂きました.

7. 九州時代

夫の転勤で九州に引っ越したのもこの頃です．九州では産業医科大学の松井清先生が一緒に代数群のセミナーをしたり採点の仕事をまわしてくださったり，色々な配慮をしてくださいました．また九州大学では吉田正章先生，加藤十吉先生，鈴木昌和先生，佐藤栄一先生とセミナーなどで親しく交流させていただいたことが大きな励みになりました．おかげで九州での 2 年間は数学的にはブランクなしの期間になっただけでなく次の大きなステップを与えてくれるきっかけになったのでした.

九州での 2 年間の終り頃，「近いうちに九州大学で助手の公募があるから応募してみたらどうか」という情報を頂きました．実際に公募が始まったのは我が家が東京に引っ越してからでしたので迷いましたが，夫が意外にも「子供のことは何とかなるから，チャレンジしてはどうか」と言ってくれ，その言葉に背中を押されて応募したところ幸運にも採用していただきました.

職を得たことで世界観が広がりました.「立場が人をつくる」ということを実感します．なかなか就職が決まらなかった間は，自分と自分の数学のことしか考えていなかったのですが，就職してからは数学自体の発展や人を育てることの大切さを考えるようになりました．逆境が人を育てるということもあると思いますが，しかるべき順境のほうがより人を育てることも多いのではないでしょうか.

その頃ドイツの Max–Planck 研究所に滞在していたとき，所長で親日家の Hirzebruch 氏が私の東京九州間の飛行機通勤を面白がって，初対面の人に私を紹介するときに「こちらが 1000 キロの道のりを飛行機で通勤している石井さんです」と紹介し，相手が目を丸くすると，「毎日ではなく，毎週だけどね」とにこにこしておっしゃっていました.

その後 2 年足らずで東京工業大学の助手に採用されましたが，九州大学の先生方がこの移動をとても喜んでくださったのはありがたいことでした．また毎日，家に帰り着けるというのもとてもありがたいことでした.

8. 新しい問題

東京工業大学では引き続き特異点の分類，変形理論を考えていました．トーラス埋め込みを使った非退化超曲面の研究も例が色々計算できるのがとても面白く感じられました．転機が訪れたのは 2000 年，Cambridge の Newton 研究所でした．そこで Denef の弧空間，ジェットスキームの話を初めて聴いたときです．その魅力に取り付かれたのですが，色々例を計算してみるもののどのよ

うな問題で自分が貢献できるのかわからず，手をこまねいているだけでした．その後 Mustata のジェットスキームによる標準特異点の特徴付けの論文を読み，感動し，ジェットスキームのアイデアの源である Nash の 1968 年の「特異点の弧構造」を読みました．そこには特異点解消における本質的因子と特異点を通る弧の族が 1 対 1 に対応するだろうということが予想として書かれていました（これは Nash 問題と呼ばれます）．とても不思議で魅力的な問題です．色々調べてみると 3 次元以上では何もわかっておらず，2 次元の正規特異点についても特殊な場合以外ほとんど解決されていないことがわかりました．最も簡単なはずの有理 2 重点でも完全には解決されていないので，とても難しい問題だということがわかりました．それでもトーラス埋め込みの特異点では次元に関係なく解決できるのではないかと思い，色々やってみたすえ 2003 年に Princeton 大学の Janos Kollár 氏との共同研究で，トーラス埋め込みの特異点では次元に関係なく肯定的に解決され，一般の場合は 4 次元以上の特異点で反例があるということを示しました．しかもこの反例は超曲面端末特異点なのです．Nash 問題が肯定的に解決されるということと特異点の善し悪しは無関係であることを示す端的な例になっています．この後，任意の次元の正規でないトーラス埋め込みの特異点や，擬通常特異点などについても Nash 問題が肯定的に解決されることを示しましたが，未解決の一般の 2，3 次元特異点に関しては何度か挑戦してみたものの，まだ最終的な結果が得られていないのが現状です．弧空間やジェットスキームの構造を調べる論文をいくつか書きましたが，心の中ではいつか Nash 問題の未解決部分の解決につながらないかと思ってのことです．一方で弧空間やジェットスキームがどれだけ多様体の特異点を特徴付けるかということもまた面白い問題です．まだまだこの分野ではなすべき仕事がたくさんあるようです．

9. 振り返って

こうやって振り返ってみると，私の数学のやり方は理念とか哲学とかではなく常に目の前の不思議な現象に対する好奇心が原動力になってきたようです．数学は美しいということがよく言われますが，「このような美しい理論が成立しているはずだ」という予想が先に立ってしまうと私の場合は成功したためしがありません．目の前の数学的現象にひたすら謙虚に対峙して初めて道が開けてくるのが常でした．そして不思議な現象があるととても嬉しくなります．わからないことに出会うとその先にどんな素晴らしいことが開けてくるのか楽しみになります．数学という大海原の砂浜で，貝殻で遊ぶ幼子のようにこれからも研究を続けていきたいと思います．最後に，能天気で時々尖った言動をする私を忍耐強く寛大に見守ってきてくださった数学者の皆様と私の夫を初め家族に感謝します．

（いしい・しほこ，東京工業大学大学院理工学研究科）

特　集（2010 年 1 月号予告）

無限次元の魅力

諸分野を照らす多彩な舞台装置

本体 952 円

はじめに	河東　泰之
無限次元系と繰り込み群	渡辺　浩
無限次元の幾何学	前田　吉昭
無限次元代数	松井　宏樹
無限次元対称性	脇本　実
非線形波動から無限の対称性へ	津田　照久
無限次元表現	関口　英子
無限次元微積分	高岡　秀夫
［コラム］	岩井　敏洋
［コラム］	今井　浩
［インタビュー］	河東　泰之

特　集（2009 年 11 月号）

可積分系の世界

数理物理を語るための知のツール

本体 952 円

はじめに	時弘　哲治
可積分系とは何か　その歴史と発展	薩摩　順吉
可積分系と方程式　ソリトンとパンルヴェ方程式	R. Willox
可積分系と幾何学　等位集合の形と代数幾何	井上　玲
可積分系と統計力学	鈴木　淳史
量子群と可積分系	尾角　正人
可積分系と共形場理論	山田　泰彦
可積分系と弦理論	酒井　一博
可積分系と重力	野澤　真人 前田　恵一
［コラム］可積分アルゴリズム	中村　佳正
［コラム］可積分系と渋滞学	西成　活裕
《名著に親しむ》可積分系への入門書たち	時弘　哲治
［インタビュー］可積分系の面白さ	時弘　哲治
《連載》目で見て学ぶ量子力学　その 14	外村　彰
問題例で深める物理　その 10	香取　眞理 中野　徹
《物理の道しるべ》第 12 回	江口　徹

編集後記

探求という言葉を辞書で調べてみると「事物の真の姿は何かということを探り，見極めること」とあります．今回の特集を眺めてみると物理学の歴史は探求の歴史であったのだろうと感じます．私も様々なことを探求していろいろなことの真の姿を捉えられればなあと思っていますが，歴史上の偉人には到底及びません．

小誌は今月号で一足先に 1 年を終えますが，来年も日々探求に勤しみ，よりよい特集を作り上げていきたいと思いますので，よろしくお願い致します．（R）

数　理　科　学　12月号

2009 年 12 月 1 日発行

数 理 科 学 編 集 部　　発行人 木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 ⓒ 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁